Corrigé devoir à la maison

Optimisation MACS 2

Ex 1

$$J_0(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

1) $y \in H^1([0,1])$

$$J_0'(y)_{.w} = \int_0^1 \frac{y'(x) . w'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\, dx$$

de même

$$\left(J_0''(y) w_1, w_2 \right) = \int_0^1 \frac{w_1' . w_2'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\, dx$$

$$- \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^1 \frac{(y' w_1') . \cancel{2}(y' . w_2')}{\sqrt{1 + y'(x)^2}^3}\, dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt{1 + y'(x)^2}\right)^3} \right\} w_1' \, w_2' \, dx$$

2) Convexité

Le problème est que même si $\sqrt{1+t^2}$ est une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}$

i.e $\sqrt{1+(\theta u + (1-\theta) v)^2} < \theta \sqrt{1+u^2} + (1-\theta)\sqrt{1+v^2}$

On ne peut pas en déduire que

$\forall\ y_1$ et $y_2 \in H^1(0,1)$

$$(*.1)\quad \sqrt{1+\left(\theta y_1' + (1-\theta) y_2'\right)^2} < \theta\sqrt{1+(y_1')^2} + (1-\theta)\sqrt{1+(y_2')^2}$$

pour prouve il suffit de prendre

$y_1 = C_1$ constante et $y_2 = C_2$ autre constante

telle que $C_1 \neq C_2 \neq 0$ alors y_1 et y_2

sont deux elements distincts de $H^1(0,1)$

cependant

$$\forall x \quad \sqrt{1+\left(\theta y_1' + (1-\theta) y_2'\right)^2} = 1 = \sqrt{1+(y_1')^2} = \sqrt{1+(y_2')^2}$$

Sur $H^1(0,1)$ cette inegalité ne peut donc pas être stricte ! on a donc seul^t que

$$\forall x \quad \sqrt{1+\left(\theta y_1' + (1-\theta) y_2'\right)^2} \boxed{\leq} \theta\sqrt{1+(y_1')^2} + (1-\theta)\sqrt{1+(y_2')^2}$$

Il suffit d'integrer en x pour obtenir que

$$J(\theta y_1 + (1-\theta) y_2) \boxed{\leq} \theta J(y_1) + (1-\theta) J(y_2)$$

$$\boxed{J \text{ est donc convexe sur } H^1(0,1)}$$

Si on se restreint au sous espace $H^1_0(0,1)$

ou $H^1_0(0,1) = \{ y \in H^1(0,1) \ / \ y(0) = y(1) = 0 \}$

alors les constantes précédentes ne peuvent pas être dans $H^1_0(0,1)$ car la seule constante est 0.

Ponctuellement, on conclut alors que $\forall y_1$ et $y_2 \in H^1_0(0,1)$ la relation (✱. 1) est vraie dans le sens strict :

$$\boxed{J \text{ est strictement convexe sur } H^1_0(0,1)}$$

En utilisant la proposition 4.2 du polycopié

J_0 α - convexe J_0 2 × Gâteau diff	$\Longleftrightarrow$	$(J''(u)w, w) \geq \alpha \|w\|^2$ $\forall\, w \in H$

Il faut donc montrer que sur $H^1_0(0,1)$

$$\left(J_0''(u)w, w\right) \geq \alpha \|w\|^2_{H^1(0,1)}$$

or on n'a que

grosse hypothèse

$$(✱.2)\quad \left(J_0''(u)w, w\right) = \int_0^1 \frac{|w'|^2}{\sqrt{1+(u')^2}^3}\,dx \geq C\int_0^1 |w'|^2 dx$$

on a donc l'estimation par la semi norme seulement puisque norme de $H^1(0,1)$ se compose de

$$|u|^2_{H^1(0,1)} = \int_0^1 |u|^2 + |u'|^2\,dx$$

Pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ (4)

(fonctions $C^\infty(0,1)$ a support strictement inclus dans $(0,1)$)

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,dt$$

mais comme $\operatorname{supp}\varphi \subset]0,1[$ $\quad \varphi(0)=0$

et on utilise Cauchy-Schwartz

$$\varphi^2(x) \leq \left(\int_0^x \varphi'(t)\,dt\right)^2$$

$$\leq \int_0^x (\varphi'(t))^2\,dt \cdot \int_0^x dt$$

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx \leq \mu(0,1)^2 \cdot \int_0^1 (\varphi'(t))^2\,dt$$

On a donc pour toute fonction régulière de $H_0^1(0,1)$

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |\varphi'(x)|^2 dx$$

Ceci implique que sur $H_0^1(0,1)$ la ½ norme du gradient est une norme.

(Par densité de $C_0^\infty(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$)

NB le même resultat est faux sur $H^1(0,1)$

Pour pouvoir borner le denominateur
il faut une hypothèse sur la borne de u',
En effet on a utilisé que $|u'|_{L^\infty(0,1)} < +\infty$
pour ecrire que

$$\int_0^1 \frac{|w'|^2}{\sqrt{1+(u')^2}^3}\, dx \geq C \int_0^1 |w'|^2$$

avec
$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\|u'\|^2_{L^\infty(0,1)}}^3}$$

Si on considère des fonctions de $H^1(0,1)$
Les injections Sobolev nous assurent
seulement que $H^1(0,1) \hookrightarrow C^{0,1/2}(0,1)$
ou $C^{0,1/2}(0,1)$ sont les fonctions continues
satisfaisant

$$|u(x) - u(y)| < C\,|y-x|^{1/2}$$

Ce qui n'est pas suffisant pour conclure
que

$$\|u'\|_{L^\infty(0,1)} < \infty$$

On ajoute donc en plus de la regularité
pour conclure que

J_0 est α convexe sur $H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$
ou $H^2(0,1) := \left\{ u \in L^2_{loc}(0,1) \text{ telle que } \begin{array}{l} u'' \in L^2 \\ u' \in L^2 \\ u \in L^2 \end{array} \right\}$

Ce qui assure la régularité suffisante pour avoir continuité de la dérivée.

3. Soit $\phi \in C^1(0,1)$

Si $J(y) - \int_0^1 \phi' y \, dx$ admet un inf alors

$$J'(y_0).h - \int_0^1 \phi'.h \, dx = 0 \quad \forall h \in H^1(0,1)$$

en ce point (y_0)

On suppose que y_0 soit assez régulière pour que toutes les opérations suivantes soient justifiées:

$$\int_0^1 \frac{y_0'.h'}{\sqrt{1+(y_0')^2}} dx - \int_0^1 \phi'.h \, dx = 0$$

et on intègre par partie en prenant $h \in C_0^\infty(0,1)$. Ceci donne

$$-\int_0^1 \left(\frac{y_0'}{\sqrt{1+(y_0')^2}}\right)'.h - \int_0^1 \phi'.h \, dx = 0$$

Cette égalité implique que $\left(\frac{y_0'}{\sqrt{1+(y_0')^2}}\right)' + \phi' = 0$

presque partout sur $(0,1)$.

En intégrant ponctuellement cette égalité on obtient

$$\frac{y_0'}{\sqrt{1+(y_0')^2}} + \phi = c^{ste} = k$$

$$y_0' = (k-\phi)\sqrt{1+(y_0')^2}$$

que l'on met au carré. Ceci donne

$$(y_0')^2\left(1-(k-\phi)^2\right) = (k-\phi)^2$$

ce qui donne une forme explicite de y_0'

$$y_0' = \sqrt{\frac{(k-\phi)^2}{1-(k-\phi)^2}} = \frac{|k-\phi|}{\sqrt{1-(k-\phi)^2}}$$

si $\boxed{(k-\phi)^2 < 1}$

L'intégration de cette équation donne une forme explicite de y_0.

Conditions aux limites :

Si ϕ est assez régulière et si on choisit k telle que $(k-\phi)^2 < 1$ alors $y_0' \in C^1(0,1)$ et donc $y_0 \in C^2(0,1)$.

On peut donc parler de trace et faire une intégration par partie :

$$\int \frac{y_0' \cdot h'}{\sqrt{1+(y_0')^2}} - \int_0^1 \phi' . h = 0$$

avec $h \in C^1([0,1])$ $h \neq 0$ sur $x=0$ et $x=1$

$$\forall h \in C^1([0,1]) \left[\frac{y_0' \cdot h}{\sqrt{1+(y_0')^2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\left\{\frac{y_0'}{\sqrt{1+(y_0')^2}} - \phi'\right\}}_{0} . h = 0$$

Ce qui montre que en choisissant différentes valeurs de $h(0)$ et $h(1)$

$$y'(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(1) = 0$$

si on minimise $J(y) - \int \phi . y$ sur $H^1(0,1)$

Tandis que si on minimise $J - \int \phi . y$ sur $H^1_0(0,1)$ les conditions aux limites sont dans l'espace lui même.

4]

$$J'(y).w = \int_0^1 \left\{ \frac{f(y)\, y'.w'}{\sqrt{1+(y')^2}} + f'(y).w \sqrt{1+(y')^2} \right\} dx$$

$$\left(J''(y)w, k\right) = \int_0^1 \left\{ f''(y)\, w.k \sqrt{1+(y')^2} + \frac{f'(y)y' \{ kw' + k'w \}}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{f(y)\, k'w'}{\sqrt{1+(y')^2}^{\,3}} \right\} dx$$

Si on prend $k = w$ alors il est possible de reformuler l'integrale comme une forme bilinéaire sur les vecteurs $(w, w')^*$ et $(k, k')^*$

$$\left(J''(y)w, k\right) = \int_0^1 \left\{ \begin{pmatrix} f'' & \dfrac{f'(y)y'}{1+(y')^2} \\ \text{sym} & \dfrac{f}{(1+(y')^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} \right\} dx$$

qui est définie positive si la plus petite valeur propre de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} f'' & f'y'/(1+y') \\ \text{sym} & f/(1+(y')^2)^2 \end{pmatrix}$$ est strictement positive pour tout $x \in (0,1)$.

Supposons que tel soit le cas i.e

$$\exists \; \alpha \geq / \quad \forall x \in (0,1)$$

$$(M\xi, \xi) \geq \alpha |\xi|^2 \geqslant 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

alors

$$(J''(y)w, w) \geq \alpha \int_0^1 |w|^2 + |w'|^2 \, dx$$

$$\geqslant \alpha \; \|w\|^2_{H^1(0,1)}$$

<u>Condition nécessaire</u> sur le spectre de M

$$\det M > 0 \iff \frac{f''f - (f')^2(y')^2}{(1+(y')^2)^2} > 0$$

mais déjà cette condition ne dépend pas du seul signe de f'' ou

<u>Condition suffisante</u> (dans le cas $\mathbb{R}^2$)

$$\det M > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} M > 0$$

i.e
$$\begin{cases} f''(1+(y')^2)^2 + f > 0 \\ f''f - (f')^2(y')^2 > 0 \end{cases}$$

ce qui ne dépend pas non plus du seul signe de f''. Contre-exemple : $f_\delta = \sqrt{y^2+\delta} - c$ autour de $y = c^{ste}$.

5] Même conclusion ! on applique la question 4] au cas particulier de $f = y^2$

Exercice 2

L'inégalité de poincaré s'écrit $D = D(R_0)$

$\exists C > 0 \quad C(D)$ tq $\forall u \in H_0^1(D)$

$$\int_D |u|^2 dx \leq C \int_D |\nabla u|^2 dx$$

La constante C ne dépend que du domaine (et on va le prouver !)

Pour aboutir à cette inégalité on peut chercher à minimiser la fonctionnelle suivante

$$J(u) = \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_D |u|^2 dx}$$

Dont les équations de Euler Lagrange associées s'écrivent

$$J'(u).h = \frac{2\int_D \nabla u \cdot \nabla h \, dx}{\int_D |u|^2 dx}$$

$$- 2 \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_D |u|^2 dx\right)^2} \int_D u \cdot h \, dx$$

$$= \frac{2}{\int_D |u|^2 dx} \left\{ \int_D \nabla u \cdot \nabla h \, dx - J \int_D u \cdot h \, dx \right\} = 0$$

En supposant que $u \in H^2(D)$

et en prenant par exemple $h \in C_0^\infty(D)$

on peut intégrer par parties

on obtient alors que

$$-\int_D \Delta u \cdot h + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot h - J \int_D u \cdot h \, dx =$$

mais sur ∂D $h = 0$ donc le terme du milieu disparaît et on a ainsi

$$\forall h \in C_0^\infty \qquad \int_D \left(-\Delta u - J(u) u\right) h \, dx = 0$$

Si on appelle $\lambda = \min_{w \in H_0^1(D)} J(w)$

$= J(u)$ on a alors que

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } D \\ u = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

C'est le problème aux valeurs propres du Laplacien. Jusqu'ici on n'a utilisé aucune des spécificités du domaine D c'est donc une argumentation générique valable pour tout D.

iii) Le Laplacien en coordonnées sphériques s'écrit

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left\{ (r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \right\} u$$

où (r,θ) sont les coordonnées cylindriques.

iv) $(*)$ devient $-\frac{1}{r^2} \left\{ (r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \right\} R(r)\,\Theta(\theta) = \lambda R \Theta$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left\{-(r\partial_r)^2 - \lambda r^2\right\} R\,\Theta = -\partial_\theta^2 \Theta R$$

en divisant par $R\Theta$ on obtient

$$\underbrace{\frac{\left\{-(r\partial_r)^2 - \lambda r^2\right\} R}{R}}_{\text{depend de } r} = \underbrace{\frac{\partial_\theta^2 \Theta}{\Theta}}_{\text{dépend de } \theta}$$

donc le rapport doit être constant :

c'est un pbm aux valeurs propres

à λ constant

$$\frac{\left\{-(r\partial_r)^2 - \lambda r^2\right\} R}{R} = \alpha = \frac{\partial_\theta^2 \Theta}{\Theta}$$

Soit encore

$$(1)\begin{cases} \partial_\theta^2 \Theta = \alpha\,\Theta & \theta \in (0, 2\pi) \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} -(r\partial_r)^2 R = (\alpha + \lambda r^2) R & R \in [0;R_0] \\ R'(0) = 0 \quad \text{et} \quad R(R_0) = 0 & R \in \{0;R_0\} \end{cases}$$

Les solution de (1) sont

$$\begin{cases} \Theta = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \\ \alpha = -n^2 \end{cases}$$

On résout maintenant en R

$$(3)\quad (r\partial_r)^2 R + (\lambda r^2 - n^2) R = 0$$

on renormalise l'equation : on pose $\rho = \sqrt{\lambda}\, r$

$$\tilde{R}(\rho) = R\left(\rho/\sqrt{\lambda}\right)$$

alors on a
$$\begin{cases} \partial_\rho \tilde{R} = \dfrac{\partial_r R}{\sqrt{\lambda}} \\ \partial^2_{\rho^2} \tilde{R} = \dfrac{\partial^2_{r^2} R}{\lambda} \end{cases}$$

l'équation (3) devient :

$$\rho^2 \partial_\rho^2 \tilde{R} + \rho\, \partial_\rho \tilde{R} + (\rho^2 - n^2)\tilde{R} = 0$$

La solution s'écrit en terme de série de Bessel :

$$\tilde{R} = C_n J_n(\rho) + D_n Y_n(\rho)$$

ou C_n, D_n coefficients reels et

J_n, Y_n fonctions de Bessel de la

1ere et 2nde espèce

$$J_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2m+n}$$

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad \text{si } z \in \mathbb{N}$$

$$Y_n(r) = \lim_{\alpha \to n} \frac{J_\alpha(r)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(r)}{\sin(\alpha\pi)}$$

$Y_n(r)$ est singulière à l'origine donc

$$D_n = 0$$

On a alors simplement

$$R(r) = C_n J_n(\sqrt{\lambda}\, r)$$

Il faut satisfaire l'autre condition aux limites

$$C_n J_n(\sqrt{\lambda}\, R_0) = 0$$

Donc $\sqrt{\lambda}\, R_0 = j_{n,k}$ où

$j_{n,k}$ est le $k^{\text{ième}}$ zéro non trivial de J_n

ceci donne

$$u_{n,k} = \left\{A_{n,k}\cos(n\theta) + B_{n,k}\sin(n\theta)\right\} J_n\left(\frac{j_{n,k}\, r}{R_0}\right)$$

Comme $j_{n,k}$ est une fonction strictement croissante sur $n \geq 0$ et $k \geq 1$

$$\boxed{\lambda = \frac{j_{0,1}^{2}}{R_0^{2}}}$$

$j_{0,1} \sim 0.4$

vi) Plus le disque est grand plus la plus petite valeur propre est petite

Ex 3

1) Si $\exists\, x_0$ tel que

$f(x_0) = g(x_0)$ et si on pose

$$J(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - g(x_2))^2$$

alors

$$J(x_0, x_0) = 0$$

2) Il suffit de prendre $J(u) \not\to +\infty$

qd $u = (x_1, x_2)^*$ tel que $|u| \longrightarrow +\infty$

par exemple

$$f = \frac{1}{1 + |x|} \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{2 + x^2}$$

$f - g > 0$

3) $I = [0,1]$ on fixe x_1

on ne fait varier que x_2

alors

(Inequation d'Euler)

$$G(x_2) = J(x_1, x_2)$$

le minimum en G sera réalisé

du pt intérieur de $[0,1]$ si

cf thm 2.4

$$G'(x_2) . x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et sur les bords si

$$G'(x_2) . x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ si } x_2 = 0$$

$$G'(x_2) . x \geq 0 \quad \mathbb{R}^- \text{ si } x_2 = 1$$

i.e si
$$\begin{cases} G'(x_2) = 0 & \text{qd } x_2 \in]0,1[\\ G'(x_2) \geq 0 & x_2 = 0 \\ G'(x_2) \leq 0 & x_2 = 1 \end{cases}$$

avec

$$G' = 2(x_2 - x_1) + 2g'(x_2)(g(x_2) - f(x_1))$$

4) $$\tilde{J}(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

et on minimise $\tilde{J}$ sous contrainte :

$$\min_{\left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 / \; y_1 = f(x_1), \; y_2 = g(x_2) \right\}} \tilde{J}(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

Pbm de minimisation sous contraintes égalité :

$$(4) \quad \bar{J}'(u) + \lambda F_1'(u) + \beta F_2'(u) = 0$$

avec $u = (x_1, x_2, y_1, y_2)$

$$F_1 = y_1 - f(x_1) \,, \quad F_2 = y_2 - g(x_2)$$

(4) s'écrit explicitement :

$$\begin{cases} 2(x_1 - x_2) - \lambda f'(x_1) = 0 \\ 2(x_1 - x_2) \qquad\qquad + \beta g'(x_2) \\ 2(y_1 - y_2) + \lambda \qquad\qquad = 0 \\ 2(y_1 - y_2) \qquad\qquad - \beta = 0 \end{cases}$$

ces équations sont vérifiées dans $\mathbb{R}^4$

c'est à dire qu'on a implicitement posé $I = \mathbb{R}$

Si I est un compact de $\mathbb{R}$

alors il faudrait aussi poser les contraintes inégalité du type

$a < x_i$ et $x_i < b$ pour $i = 1, 2$

tant que l'on est à l'intérieur de $I \times I \times f(I) \times g(I)$ ces contraintes sont inactives les multiplicateurs de lagrange associés γ_i, δ_i $i = 1,2$ sont nuls. Ils n'apparaissent pas dans (4).

Les équations (4) s'écrivent :

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) f'(x_1) = 0 \\ (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) g'(x_2) = 0 \end{cases}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = g(x_2) \end{cases}$$

Si on pose $V = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ f(x_1) - g(x_2) \end{pmatrix}$

V est normal aux deux vecteurs tangeants au pts $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, g(x_2))$

Les deux vecteurs tangeants sont donc $//$ et les vecteurs normaux aussi !

Les deux normals sont

$$n_1 = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n_2 = \begin{pmatrix} -4x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = \alpha \, n_2 \quad \text{si} \quad 2x = 4x \Rightarrow x = 0$$

donc

$$\min \; J(x_1, x_2) = \theta^2 \quad \text{si} \quad \theta > 0$$