Analyse L2S3
Feuille TD n°3

Corrections

Vuk Milisic

Laboratoire Analyse Géométrie & Applications

11 11 2020

Université Sorbonne Paris Nord

Séries à termes positifs (F TD 3)

Ex 1

Enoncé :

On considère les séries de terme général :

$$\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1}, \quad \left(\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}\right)_{n>0}, \quad \left(\frac{3^n+(-1)^n 2^n}{7^n}\right)_{n\geq 0}.$$

Pour chacune d'elles,

- déterminer la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles
- en déduire leur nature et leur somme éventuellement.

Ex 1

i) on considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

La somme partielle s'écrit :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \leq 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} S_N = 1}$$

ii) on considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right\}.$$

La somme partielle s'écrit :

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n &= \frac{1}{4}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{4n-1}\right\} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4N+3}\right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{12}}$$

La série converge : $\sum u_n < +\infty$

iii) on considère la série de terme général

$$u_n = \frac{3^n + (-2)^n}{7^n}.$$

La somme partielle s'écrit :

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{-2}{7}\right)^n \\ &= \frac{1-(3/7)^{N+1}}{1-(3/7)} + \frac{1-(-2/7)^{N+1}}{1+(2/7)} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{7}{4} + \frac{7}{9} = \frac{91}{36}}$$

Enoncé :

On considère la série de terme général :

$$\left(\frac{a_n}{10^n}\right)_{n\geq 1}, \quad a_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}.$$

1) Écrire les sommes partielles et en déduire que ces séries convergent.
2) Dans le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = m$ avec $m \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, calculer la somme de la série.

1) Les sommes partielles s'écrivent :

$$0 \leq S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = 9\left(\frac{1-10^{-N-1}}{1-10^{-1}} - 1\right) < +\infty$$

la suite S_N est croissante et majorée : elle converge.

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = m$ alors

$$S_N = m\left(\frac{1-10^{-N-1}}{1-10^{-1}} - 1\right) \to S$$

où

$$S = m\left(\frac{1}{1-10^{-1}} - 1\right) = m\left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{m}{9}$$

Enoncé

On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{3^n}{1 + 4^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que cette série est convergente.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 5^{-n}$.
3) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}, 0 \leq R_p \leq 4^{-1}5^{-p}$.
4) En déduire une valeur approchée de la somme S de cette série avec une erreur absolue inférieur à 10^{-3}.

Ex 3

1) On a la majoration :

$$u_n \leq \left(\frac{3}{4^2}\right)^n$$

et en écrivant les sommes partielles on a :

$$0 \leq S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{4^2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4^2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{3}{4^2}} \leq \frac{16}{13}$$

on a donc que S_N est une suite croissante et majorée : elle converge

2) D'après la majoration précédente, on a

$$u_n \leq \left(\frac{3}{4^2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n = 5^{-n}$$

3) D'après le cours on a

$$R_p := \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} 5^{-p} = 5^{-(p+1)} \sum_{n \in \mathbb{N}} 5^{-n} =$$
$$= 5^{-(p+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5^{-p}}{4}$$

4) On cherche p tel que : $R_p < 10^{-3}$ une condition suffisante est que $5^{-p}/4 < 10^{-3}$ ce qui donne :

$$\boxed{p > \frac{-\ln(4 \cdot 10^{-3})}{\ln 5} = 3 + \frac{2}{\ln 5} > 3}$$

Donc si $p \geq 4$ cette condition est satisfaite et on obtient que

$$S \sim \sum_{n=0}^{4} u_n = \frac{99273987473}{138011615746} = 0.7193161744856774$$

Enoncé

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que les séries de terme général :

- $\sum u_n^2$,
- $\sum \ln(1 + u_n)$

convergent aussi.

Indice

utiliser critère nécessaire pour une série convergente c-a-d :

$$\sum u_n \text{ cvg} \implies \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

et par ex. du dm u_n bornée.

Ex 4

1) D'abord on va montrer que la suite u_n est bornée :
   - Comme la série $\sum u_n$ est convergente, une condition *nécessaire* est que
     $$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$
     donc à partir d'un certain rang, u_n est bornée :
     $$\boxed{\forall \varepsilon < 1,\ \exists n_\varepsilon\ ;\ \forall n > n_\varepsilon \implies |u_n| \leq \varepsilon}$$
     ce qui implique que $0 \leq u_n < \varepsilon < 1$ à partir de n_ε.
   - Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$, il existe m tel que :
     $$m = \max_{n \in \{0, \ldots, n_\varepsilon\}} u_n$$
   - On a donc que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \max(m, 1) =: M$$

$\boxed{\textit{cqfd}}$

2) Pour $\sum u_n^2$, on a ensuite l'estimation

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n^2 \leq \max_{n \in \{0,N\}} u_n \sum_{n=0}^{N} u_n \leq M \sum u_n < \infty$$

On a à nouveau S_N suite croissante majorée : elle converge

Ex 4

3) Pour $\sum \ln(1+u_n)$, on a déjà que

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x) \leq |x|(1+|\varepsilon(x)|)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on a donc a partir d'un certain rang que

$$\ln(1+u_n) \leq u_n(1+|\varepsilon(u_n)|) \leq 2u_n$$

pour $n > n_\delta$ où

$$\forall \delta > 0 \; \exists n_\delta \; ; \; n > n_\delta \implies u_n < \delta$$

D'ou finalement :

$$T_N := \sum_{n=0}^{N} \ln(1+u_n) \leq \sum_{n=0}^{n_\delta} \ln(1+u_n) + \sum_{n=n_\delta+1}^{N} 2u_n < C + 2\sum u_n < \infty$$

et on a les mêmes conclusions.

Ex 5

Enoncé

Soit un réel $\alpha > 1$. On considère la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

1) Montrer que pour $\alpha > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right] > \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

2) En déduire que pour $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge,
3) Donner un équivalent du reste R_p.

1) On a par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c_n \in [n, n+1] \; ; \; \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{c_n^\alpha}$$

et pour $\alpha > 0$, la fonction $x^{-\alpha}$ est monotone décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc :

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{c^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

mais on a aussi que si $\alpha \neq 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right\}$$

pour $\alpha > 1$ on a donc bien le résultat.

2) Pour la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} n^{-\alpha}$, on a donc

$$S_{N+1} - 1 \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right\} \leq \frac{1}{\alpha - 1}$$

à nouveau, S_N est croissante et majorée : elle converge

3) Par le même raisonnement, on peut écrire :

$$R_p^N := \sum_{n=p}^{N} (n+1)^{-\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right\} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

à p fixé R_p^N est une suite croissante et majorée donc elle converge et on a

$$\boxed{R_p \leq \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{p^{\alpha-1}}}$$

4) Par ailleurs on a

$$\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right]<\frac{1}{n^{\alpha}}$$

que l'on somme à partir de $p+1$ et qui donne ;

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right)\leq\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha}}\leq R_p$$

On a donc pour tout $N>p$,

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right)\leq R_p\leq\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{p^{\alpha-1}}}$$

ce qui montre l'équivalence
$R_p\sim 1/((p+1)^{\alpha}(\alpha-1))\sim 1/(p^{\alpha}(\alpha-1))$

Enoncé

Etudier, en utilisant des majorations ou des minorations, les séries de terme général :

$$\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}, \quad \left(n^n\right)_{n\geq 1}, \quad \left(\frac{1}{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}\right)_{n\geq 1},$$

$$\left(\frac{n^2+2n+3}{n^3+4n^2+1}\right)_{n\geq 0}, \quad \left(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^2})\right)_{n\geq 1}, \quad \left(\frac{2^n}{3^n+n}\right)_{n\geq 1}.$$

Ex 6

1) Les sommes partielles s'écrivent :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Donc S_N croissante et majorée : elle converge.

2) On minore le terme général $u_n := n^n$:

$$u_n = \exp(n \ln n) \geq \exp(\ln n) \geq n, \quad \forall n \geq 1$$

ainsi les sommes partielles s'écrivent :

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n \geq \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \geq N$$

comme le terme de droite tend vers l'infini. $\sum u_n$ diverge.

Ex 6

3) Grace à la majoration :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

on montre comme dans la feuille de TD 2, que

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n$$

ce qui montre que

$$u_n := \frac{1}{s_n} \sim \frac{1}{\ln(n)} =: v_n$$

Et par le Corollaire 3.2.20 du cours on sait que

$$\sum v_n \text{ diverge } \iff \sum u_n \text{ diverge }.$$

Ex 6

4) Le terme général

$$u_n := \Big(\frac{n^2+2n+3}{n^3+4n^2+1}\Big) \sim \frac{1}{n} =: v_n$$

la série $\sum v_n$ diverge donc il en est de même pour $\sum_n u_n$.

5) De même,

$$u_n := \big(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^2})\big) \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2}$$

donc la série $\sum u_n$ converge

6) Et aussi :

$$\Big(\frac{2^n}{3^n+n}\Big) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et donc la série $\sum u_n$ converge.

Ex 7

Enoncé

Soit

- (a_n) une suite positive ,
- la suite (b_n) définie par

$$b_n := \frac{a_n}{1 + a_n}$$

montrer que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

1) On suppose que $\sum a_n < \infty$, on a

$$0 \leq b_n := \frac{a_n}{1 + a_n} \leq a_n$$

ce qui implique que

$$S_N := \sum_n^N b_n < \sum a_n < \infty$$

ce qui veut dire que S_N est croissante et majorée : donc elle converge *i.e.*

$$\boxed{\sum_n b_n < \infty}$$

et par contraposée : $\sum b_n$ diverge $\implies \sum a_n$ diverge

2) On suppose maintenant que $\sum b_n < \infty$ ($\sum b_n$ converge).
CN de convergence :

$$\forall \varepsilon \leq \frac{1}{2},\ \exists n_\varepsilon\ ;\ \forall n > n_\varepsilon \implies b_n \leq \varepsilon$$

ce qui donne

$$\forall n < n_\varepsilon,\ a_n \leq \varepsilon(1 + a_n)$$

ce qui est équivalent à

$$\forall n < n_\varepsilon,\ \frac{1}{2}a_n \leq (1-\varepsilon)a_n \leq \varepsilon$$

donc $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

2) (suite) Comme $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$, donc a_n est bornée :

$$\exists M > 0 \; ; \; \forall n \; a_n < M$$

donc on a aussi la majoration

$$\forall n > 0 \quad \frac{a_n}{1+M} \leq b_n$$

donc si $\sum b_n$ finie alors $\sum a_n$ est finie. En effet :

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leq (1+M) \sum_{n=n_0}^{N} b_n \leq \sum b_n < \infty$$

donc S_N converge par les mêmes arguments que précédemment.

3) Par contraposée on a aussi que :
   - $\sum b_n$ diverge $\implies \sum a_n$ diverge
   - $\sum a_n$ diverge $\implies \sum b_n$ diverge.

   On a donc bien

$$\boxed{\sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ de même nature}}$$

Enoncé

On considère la suite

$$u_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

1. étudier la nature de la série $\sum(u_n - u_{n-1})$,
2. en déduire la nature de la suite (u_n).

On écrit la différence :

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n-1} &= 2\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= 2\left(\frac{n-1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{n-1-n}{\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)^2\sqrt{n}} = \frac{-1}{\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)^2\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

on a donc que

$$u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{n^{3/2}}$$

on a donc

$$\boxed{\sum(u_n - u_{n-1}) \text{ converge}}$$

On a donc que

$$S := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} (u_n - u_{n-1}) < \infty$$

mais

$$S_N := \sum_{n=2}^{N} (u_n - u_{n-1}) = u_N - u_1$$

donc

$$\boxed{u_N \text{ converge vers } \ell := S + u_1}$$

et ceci montre que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{p}}}{2\sqrt{N}} = 1$$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ se comporte comme } 2\sqrt{n} \text{ quand } n \text{ est grand}}$$

Enoncé

Déterminer la nature des séries de terme général :

$$i)\ \frac{n+\ln n}{\sqrt{n}+n^3},\quad ii)\ \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n},\quad iii)\ e^{-n^\lambda}\ (\lambda>0),\quad iv)\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

$$v)\ \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad vi)\ \sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1},\quad vii)\ 2^{\frac{1}{n^\beta}}-1\ (\beta>0),$$

$$viii)\ \ln n\cdot|\ln\cos\frac{1}{n}|,\quad ix)\ (a-\frac{1}{n})^{2n},\ (a\in\mathbb{R})$$

$$x)\ \ln(\frac{1}{n^\alpha})-\ln(\sin\frac{1}{n^\alpha})\ (\alpha>0).$$

Ex 9

i) si $u_n := \frac{n+\ln n}{\sqrt{n}+n^3}$ alors

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

la série converge

ii) si $u_n := \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ alors

$$u_n = \exp\big((\ln n)^2 - \ln\ln n\big)$$

A partir d'un certain n_0

$$\ln\ln n \leq \ln n \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

et donc

$$u_n \geq \exp((\ln n)^2/2) \to \infty$$

et on ne satisfait donc pas la CN pour que la série diverge.

iii) Si $u_n = \exp(-n^\lambda)$, on a déjà vu que

$$\forall k > 0\ \exists C_k = k!\ ;\ \forall x > 0 \implies exp(-x) \leq C_k x^{-k}$$

et donc

$$\exp(-n^\lambda) \leq C_k n^{-\lambda k}$$

il suffit ensuite de chosir k tq $\lambda k > 1$ pour que $\sum u_n$ converge.

iv) si $u_n := \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

$\sum u_n$ diverge

v) $u_n := \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(n \sin(1/n)\right)\right) = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{3!n^2} + O(1/n^4)\right)\right) \\ &= \exp\left(n^2\left(-\frac{1}{3!n^2} + O(1/n^4)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{3!} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

on a donc que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \exp(-1/6) \neq 0}$$

donc la série diverge.

vi) $u_n := \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}\right) \\ &= n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. -\left(1+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

on a donc que

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$$

donc la série diverge.

vii) si $u_n := 2^{\frac{1}{n^\beta}} - 1$ avec $(\beta > 0)$, alors

$$u_n = \exp\left(\frac{\ln 2}{n^\beta}\right) - 1 = \frac{\ln 2}{n^\beta} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

on a donc que

$$\boxed{u_n \sim \frac{\ln 2}{n^\beta}}$$

donc la série diverge si $\beta \leq 1$ et converge sinon.

viii) Pour $u_n := \ln n \cdot |\ln\cos\frac{1}{n}|$ on développe

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17\,x^8}{2520} + \cdots$$

en $x = 0$ ce qui donne que

$$\boxed{u_n = \frac{\ln n}{2n^2} + o(n^{-2})}$$

donc la série converge.

Ex 9

ix) $u_n := (a - \frac{1}{n})^{2n}$, on écrit que

$$\left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + o(1/n) = a^2\left(1 - \frac{2}{an} + o(1/n)\right)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n\left(2\ln|a| + \ln\left(1 - \frac{2}{an} + o(1/n)\right)\right)\right) \\ &= |a|^{2n}\exp\left(-2/a + o(1)\right) \end{aligned}$$

et donc on a l'équivalence :

$$u_n \sim \exp(-2/a)a^{2n}$$

Ex 9

Puisqu'on a l'équivalence :

$$u_n \sim \exp(-2/a)a^{2n}$$

On a donc deux possibilités :

- soit $|a| < 1$, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$
- soit $|a| \geq 1$ et $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

x) $u_n := \ln(\frac{1}{n^\alpha}) - \ln(\sin\frac{1}{n^\alpha})$ avec $\alpha > 0$

- On développe $\sin(x)$ au voisinage de $x = 0$,

$$\begin{aligned}\ln(\sin(1/n^\alpha)) &= \ln\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o(n^{-3\alpha})\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o(n^{-2\alpha})\right)\right)\\ &= \ln(1/n^\alpha) + \ln\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o(n^{-2\alpha})\right)\end{aligned}$$

- au total on a

$$u_n = -\frac{1}{6n^{2\alpha}} + o(n^{-2\alpha})$$

après développement limité du $\ln(1+x)$ au vosinage de $x = 0$.

Conclusion :

- si $2\alpha > 1$ la série converge,
- sinon si $\alpha \leq 1/2$ la série diverge.