Analyse L2S3
Feuille TD n°4

Corrections

Vuk Milisic

Laboratoire Analyse Géométrie & Applications

11 11 2020

Université Sorbonne Paris Nord

Plan

Comparaison séries et intégrales généralisées (F TD 4)

Ex 1

Enoncé :

Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ continue et décroissante.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
   $0 < f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.
2. En déduire que : $0 < \sum_{k\geq 2} f(k) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{p\geq 1} f(p)$.
3. Montrer que $\sum_{k\geq 1} f(k)$ et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.
4. Donner des exemples.
5. Discuter suivant les valeurs de α, β, la convergence de l'intégrale et de la série suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\,dx, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

déterminer la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles

Ex 1

1. On utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour écrire :
$$\exists c_n \in [n, n+1] \; ; \; \int_n^{n+1} f(s)ds = f(c_n)$$
et comme f est décroissante et non-négative sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que
$$0 \leq f(n+1) \leq f(c_n) \leq f(n)$$

2. En sommant pour n allant de 1 à N on obtient que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(s)ds \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) =: S_N$$

sur l'intervalle $[1, N+1]$ f est continue et donc Riemann-intégrable, on a donc la relation de Chasles :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(s)ds = \int_{1}^{N+1} f(s)ds = I_N$$

On a donc la relation :

$$0 \leq S_{N+1} - f(1) \leq I_N \leq S_N$$

Ex 1

3. On a deux propriétés à démontrer :
   3.1 On suppose que $\int_1^\infty f(s)ds$ est convergente :

   $$0 \leq S_{N+1} \leq f(1) + I_N \leq f(1) + \int_1^\infty f(s)ds < \infty$$

   donc S_N croissante majorée : elle converge.

   3.2 Si S_N converge alors elle est majorée, donc il existe M t.q.

   $$\boxed{I_N \leq S_N \leq M}$$

4. La série de terme général $1/n^\alpha$ converge ssi $\alpha > 1$:
   $\boxed{f(x) := x^{-\alpha}}$ est $\searrow$ pour $\alpha > 0$ et $\int f$ converge ssi $\alpha > 1$.
5. La série de Bertrand de terme $1/(n^\alpha \ln^\beta n)$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$: idem avec $\boxed{f(x) := x^{-\alpha} \ln^{-\beta}(x)}$.

Enoncé :

On considère les deux séries ci-dessous.

1) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k^2+1}$
2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Convergent-elles ? Convergent-elles absolument ?

Indication

on pourra ramener l'étude de ces séries à l'étude d'intégrales impropres que l'on explicitera.

Ex 2

1) Calcul direct : on utilise que

$$u_k = \frac{1}{2k^2+1} \sim \frac{1}{2k^2} =: v_n,$$

pour k grand. Or $\sum v_n$ converge donc la série $\sum u_n$ est convergente.
Sinon on a la comparaison : (cf. Ex 1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{2x^2+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \infty$$

et comme on sait que l'intégrale est bornée la série est convergente.
Elle est positive donc aussi absolument convergente.

2) La série de terme général $a_n = (-1)^n/(2n+1)$ est alternée, en effet :

$$u_n = (-1)^n |u_n|$$

ce qui est la Définition 3.2.25 du cours.
La série est absolument divergente : en effet la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc d'après l'Ex 1 que

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n| \geq \int_0^{N+1} f(x)dx = \ln(2N+1)$$

et le terme de droite tend vers $+\infty$ lorsque N croit

Ex 2

On écrit la somme partielle pour N pair :

$$
\begin{aligned}
S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{k=0}^{N/2} \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2(2k+1)+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} =: S'_{N/2}, \text{ où } S'_N = \sum_{n=0}^{N} v_n, \quad v_n := \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}
\end{aligned}
$$

Comme précédemment, on pose

$$
f(x) = \frac{2}{(4x+1)(4x+3)}
$$

c'est une fonction positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc d'après Ex 1 :

$$
S'_{N+1} - v_0 \leq \int_0^{N+1} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^+} f(x)dx < +\infty
$$

et donc S_N converge comme suite croissante et majorée.

Ex 3

Enoncé

Soit f une fonction positive continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ soit divergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$I_n = \int_1^n f(t)\,dt \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

1. Montrer que la suite $(S_n - I_n)_{n\geq 1}$ décroit et est minorée.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1$ et donc que $I_n \sim S_n$ quand n tend vers l'infini.
3. Application : Donner des équivalents lorsque n tend vers l'infini pour

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\ (0 < \alpha < 1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Ex 3

1) On a

$$S_{n+1} - I_{n+1} - S_n + I_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 0$$

car on a

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

comme dans l'Ex 1. On a donc que $S_n - I_n$ est décroissante.
Par ailleurs,

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

implique que

$$I_N + \int_N^{N+1} f(x)dx \leq S_N \implies 0 \leq \int_N^{N+1} f(x)dx \leq S_N - I_N$$

et donc : $S_N - I_N$ suite décroissante minorée donc $\exists \ell \geq 0$ t.q. $S_N - I_N \to \ell$

Ex 3

2) On a que

$$\lim_{N\to\infty} I_N = +\infty$$

car l'intégrale I_N est positive et divergente. Donc comme

$$I_N \leq S_N$$

d'après la dernière question, donc

$$\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$$

Comme, d'après question précédente, on a aussi $\exists \ell > 0$ t.q.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \; ; \; \forall N \geq N_\varepsilon \implies |S_N - I_N - \ell| \leq \varepsilon \implies |S_N - I_N| \leq \varepsilon + \ell$

on a aussi

$\exists N'_\varepsilon \; ; \; \forall N \geq N'_\varepsilon \implies |\ell/S_N| \leq \varepsilon/2$ et $\exists N''_\varepsilon > 0 \; ; \; \forall N > N''_\varepsilon \implies |S_N| \geq 2$

Donc pour tout $N > \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon, N''_\varepsilon)$

$$|\,1 - I_N/S_N| \leq \varepsilon/S_N + \ell/S_n \leq \varepsilon$$

3. Application

   3.1 $f(x) := 1/x$ donne :

$$I_N = \int_1^N \frac{dx}{x} = \ln(N) \implies S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln(N)$$

   3.2 Pour $f(x) := 1/x^\alpha$, avec $\alpha \in (0, 1)$, on a

$$I_N = \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{N^\alpha - 1}{1 - \alpha}$$

   3.3 Si $f(x) := 1/\sqrt{1 + x^2}$,

$$I_N = \int_1^N \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arcsinh}(N) - \pi/2$$

avec

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

(même calcul de primitive que pour $\arcsin$).