Analyse L2S3
Feuille n°5

Corrections

Vuk Milisic

Laboratoire Analyse Géométrie & Applications

11 11 2020

Université Sorbonne Paris Nord

Séries à termes quelconques

Enoncé

Étudier la nature des séries de terme général :

$$i)\ \left(\frac{2}{3+i}\right)^n, \quad ii)\ \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\ (\alpha > 0),$$

$$iii)\ \frac{(-1)^n}{n+\cos n}, \quad iv)\ \frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha}\ (\alpha > 0).$$

Ex 1

i) c'est une série géométrique :

$$u_n = z^n, \quad z = \frac{2}{3+i} \quad |z| = \frac{2}{\sqrt{10}} < 1$$

la série est donc convergente et on a

$$\boxed{S = \frac{1}{1-z} = \frac{3+i}{1+i} = 2-i}$$

i) c'est une série géométrique :

$$u_n = z^n, \quad z = \frac{2}{3+i} \quad |z| = \frac{2}{\sqrt{10}} < 1$$

la série est donc convergente et on a

$$\boxed{S = \frac{1}{1-z} = \frac{3+i}{1+i} = 2-i}$$

ii) c'est une série alternée :

$$u_n = (-1)^n |u_n|$$

de plus

1. la suite $|u_n| = 1/n^\alpha$ est décroissante
2. et de limite nulle

Thm 5 p. 137 du cours, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

iii) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x + \cos(x)} \implies f'(x) = \frac{\sin(x) - 1}{(x + \cos(x))^2} \leq 0$$

donc f est décroissante. De plus, pour tout $x > 1$ on a

$$x > 1 \geq -\cos(x) \implies f(x) > 0.$$

Or $u_n = (-1)^n f(n)$, Def. 8 et Thm 5 p. 137 impliquent $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

iii) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x + \cos(x)} \implies f'(x) = \frac{\sin(x) - 1}{(x + \cos(x))^2} \leq 0$$

donc f est décroissante. De plus, pour tout $x > 1$ on a

$$x > 1 \geq -\cos(x) \implies f(x) > 0.$$

Or $u_n = (-1)^n f(n)$, Def. 8 et Thm 5 p. 137 impliquent $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

iv) Plusieurs cas de figure suivant la valeur de α :

- si $\alpha > 1$ convergence par comparaison (série à termes positifs!).
- sinon si $\alpha \in (0, 1]$, à nouveau plusieurs cas de figure :

iv) (suite) Plusieurs cas de figure suivant la valeur de α :

- sinon si $\alpha \in (0, 1]$, à nouveau plusieurs cas de figure :
  - soit $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors
  $$u_n \equiv \frac{1}{n^\alpha}$$
  et alors par critère de Riemann :
  $$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$
  - soit $\theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors on réécrit (en utilisant que $\cos^2(\beta) = (\cos(2\beta) + 1)/2$)
  $$u_n = \frac{\cos(2n\theta) + 1}{2n^\alpha} =: a_n + b_n, \quad a_n := \frac{\cos(2n\theta)}{2n^\alpha}$$
  et on a $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$ par la Règle d'Abel, mais b_n diverge. Donc
  $$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$

Ex 1

On détaille ici pourquoi la série $\sum a_n$ converge :

$$a_n = \frac{\cos(2n\theta)}{2n^\alpha} = \operatorname{Re} c_N \text{ où } c_N := \frac{\exp(2i\theta)^n}{2n^\alpha}$$

on a par ailleurs :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \exp(2i\theta)^n = \frac{1-\exp(2i\theta)^{N+1}}{1-\exp(2i\theta)}$$

donc on est dans les hypothèses du Thm 6 p. 139 (Règle d'Abel) du cours :

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$$

Enoncé

Montrer que la série de terme général :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx, \quad n \geq 0,$$

est alternée, absolument convergente et calculer sa somme.

- La suite u_n est alternée ?
  Sur $[n\,\pi, (n+1)\pi]$ on a

$$(-1)^n \sin(x) = |\sin(x)|$$

on a donc :

$$u_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\,|\sin x|\,dx$$

mais on a aussi :

$$|u_n| = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\,|\sin x|\,dx\right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\,|\sin x|\,dx$$

donc

$$u_n = (-1)^n |u_n|$$

Ex 2

- La suite $|u_n|$ est convergente ?
  On a
  $$|u_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \exp(-x)dx = \exp(-n\pi)\left(1-\exp(-\pi)\right) \leq 2\exp(-\pi n)$$
  et donc à partir d'un certain rang :
  $$\exists (C, n_C)\ ;\ \forall n > n_C \implies |u_n| \ \leq Cn^{-2}$$
  et donc la série est absolument convergente.
- Calculer sa somme : on pose
  $$v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \exp(-x)\exp(ix)\,dx, \quad n \geq 0,$$
  la somme partielle
  $$S_N = \sum_{n=0}^{N} v_n = \int_0^{(N+1)\pi} \exp((-1+i)x)dx = \left[\frac{\exp((-1+i)x)}{-1+i}\right]_0^{(N+1)\pi}$$

- Calculer sa somme (suite)
  On a donc

$$S_N = \frac{1}{1-i} + \frac{\exp((-1+i)(N+1))}{-1+i} \to S := \frac{1}{1-i}$$

quand $N \to \infty$. Comme

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \mathrm{Im}\,(S_N)$$

on a que

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \mathrm{Im}\, S = \mathrm{Im}\, \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}}$$

Enoncé

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $r_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Calculer $2(I_{2n+1} + I_{2n-1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire les sommes partielles de la série de terme général u_n.
2. Montrer que la série de terme général u_n est convergente. Calculer sa somme et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. En s'inspirant de la méthode précédente, montrer que $\sum_{n \geq 0} r_n = \frac{\pi}{4}$.

1. On pose

$$J_n := 2(I_{2n+1}+I_{2n-1}) = 2\int_0^1 \left(y^{2n+1} + y^{2n-1}\right)\frac{dy}{1+y^2} = 2\int_0^1 y^{2n-1}dy$$

où l'on a posé :

$$y := \tan x \Leftrightarrow x = \text{arctan}(y) \implies \frac{dy}{1+y^2} = dx$$

on a donc

$$J_n = 2\left[\frac{y^{2n}}{2n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$$

1. (suite)
   Par exemple, si n est impair, on a

$$\begin{cases} 2(I_{2n+1}+I_{2n-1}) & = \dfrac{1}{n} \\ -2(I_{2n-1}+I_{2n-3}) & = -\dfrac{1}{n-1} \\ \dots & \dots \\ -2(I_5+I_3) & = -\dfrac{1}{2} \\ 2(I_3+I_1) & = 1 \end{cases}$$

   après addition de toutes les lignes on a

$$S_n := -\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = 2(I_1 + I_{2n+1})$$

   idem pour n pair :

$$S_n := -\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = 2(I_1 - I_{2n+1})$$

2. Par le changement de variable précédent on a

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx = \int_0^1 y^n \frac{dy}{1+y^2}$$
$$\leq \int_0^1 y^n dy \leq \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini.
Donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -2I_1 = -2\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx$$
$$= 2\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = 2\left[\ln\cos(x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln(2)$$

2. $\sum u_n$ est une série alternée. D'après le Thm 5 du cours on a

$$R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n, \quad |R_N| \leq |u_{N+1}| = \frac{1}{N+1} < 10^{-1}$$

donc la CN est $N > 9$ implique que

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1627}{2520} \sim -0.6456349206349207$$

et

$$-\ln(2) = -0.693147180559945 3$$

3. De la même manière,

$$I_{2n} + I_{2n-2} = \int_0^1 y^{2n-2} dy = \left[\frac{y^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n-1}$$

On a donc avec la même méthode :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1}(I_{2p} + I_{2p-2})$$

le terme de droite est une série téléscopique, on a donc :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+1} = I_0 - (-1)^n I_{2n}$$

et donc

$$S = I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \pi/4$$

Enoncé

Étudier la nature des séries de terme général :

$$i)\ \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+\pi}}, \quad ii)\ \exp\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)\ (a>0),$$

$$iii)\ \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right), \quad iv)\ \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)\ (a>0).$$

Ex 4

i) série alternée :

- $u_n = (-1)^n |u_n|$
- $f(x) = 1/\sqrt{x+\pi}$ est une fonction décroissante et

$$|u_n| = f(n)$$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, et donc $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$,

Par le thm 5 p.137 du cours $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

Ex 4

i) série alternée :
- $u_n = (-1)^n |u_n|$
- $f(x) = 1/\sqrt{x+\pi}$ est une fonction décroissante et

$$|u_n| = f(n)$$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, et donc $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$,

Par le thm 5 p.137 du cours $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

ii) u_n ne tend pas vers zero quand n tend vers l'infini :

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$

par Lemme 2 p. 125 du cours.

Ex 4

i) série alternée :

- $u_n = (-1)^n |u_n|$
- $f(x) = 1/\sqrt{x+\pi}$ est une fonction décroissante et

$$|u_n| = f(n)$$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, et donc $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$,

Par le thm 5 p.137 du cours $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

ii) u_n ne tend pas vers zero quand n tend vers l'infini :

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$

par Lemme 2 p. 125 du cours.

iii) On développe au voisinage de zero :
$\ln(1+x) = x - x^2/2(1+\varepsilon(x))$, ce qui donne que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n^2+2)^{1/3}} - \frac{1}{2(n^2+2)^{2/3}}(1+\varepsilon(n^{-2/3})) =: v_n + w_n$$

on a

- v_n alternée et satisfaisant les critères de Thm 5 p. 137
- w_n absolument convergente (car $w_n \sim n^{-4/3}$)

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

iv) D'après l'énoncé

$$u_n := \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^a}\right)$$

car sin est une fonction impaire. Pour tout $n \geq 1$

$$\sin\left(\frac{1}{n^a}\right) \in (0, \sin(1))$$

on a donc bien :

$$u_n = (-1)^n \left|\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)\right| = (-1)^n |u_n|.$$

C'est une suite alternée.

iv) (suite) si

$$f(x) := \sin\left(\frac{1}{x^a}\right)$$

alors comme $a > 0$, on a

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x^a}\right)(-a)x^{-a-1} < 0, \quad \forall x \in (0,1)$$

f est donc décroissante. Et comme

$$|u_n| = f(n)$$

la suite $|u_n|$ est décroissante. Sa limite quand n tend vers l'infini est 0.
Par le Thm 5 p. 137

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

Enoncé

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n \sqrt[4]{n}}, \quad n \geq 1,$$

est

i) montrer que la série est alternée

ii) montrer en outre que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

iii) montrer que pourtant elle n'est pas convergente.

Ex 5

i) La suite est-elle alternée ?
Pour $n > 1$

$$n^{1/2} > n^{1/4}$$

donc

$$n^{1/2} + (-1)^n n^{1/4} > 0$$

on a donc que

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n^{1/2} + (-1)^n n^{1/4}} = (-1)^n |u_n|, \quad \forall n > 1$$

ii) Limite quand n tend vers l'infini ?

$$|u_n| \sim n^{-1/2}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

iii) série divergente ? On voit de manière évidente que

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} =: v_n$$

on fait la différence :

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= (-1)^n \left\{ \frac{1}{n^{1/2} + (-1)^n n^{1/4}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
&= -\frac{n^{1/4}}{(n^{1/2} + (-1)^n n^{1/4}) n^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{(n^{1/2} + (-1)^n n^{1/4}) n^{1/4}} \\
&= -\frac{1}{n^{3/4}} \left(\frac{1}{1 + (-1)^n n^{-1/4}} \right) \\
&= -\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \left(1 - (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

iii) (suite) Donc on a finalement,

$$u_n = v_n - \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} + w_n$$

avec

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)$$

où

- $\sum v_n$ série alternée et convergente,
- $\sum w_n$ série cvg (somme alternée cvg et abs cvg),
- mais $\boxed{-\sum n^{-3/4} \text{ div}}$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$$

- Critère nécessaire pour le Thm 5 p. 137 :

$$|u_n| \text{ doit être décroissante !}$$

Enoncé

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha} + (-1)^n}$, où $\alpha > 0$.

1. Pour quelles valeurs de α la série est-elle absolument convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série est-elle convergente ?
3. Donnez un équivalent de u_n . Que remarquez-vous ?

Ex 6

1) On a que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et $\sum n^{-\alpha}$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

1) On a que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et $\sum n^{-\alpha}$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

2) Comme dans l'exercice précédent, on pose

$$v_n := \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

et on écrit :

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= (-1)^n \left\{ \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha} + (-1)^n} - \frac{1}{n^\alpha} \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \frac{n^{2\alpha} - (n^{2\alpha} + (-1)^n)}{(n^{2\alpha} + (-1)^n)n^\alpha} \right\} = \frac{-1}{(n^{2\alpha} + (-1)^n)n^\alpha} =: -w_n \end{aligned}$$

2) Pour $n > 1$, $n^{2\alpha} + (-1)^n > 0$ et donc w_n suite à termes positifs

$$u_n = v_n - w_n, \quad v_n := \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, w_n := \frac{1}{(n^{2\alpha} + (-1)^n)n^\alpha}$$

avec

- $\sum v_n$ série alternée convergente pour tout $\alpha > 0$
- $\sum w_n$ divergente pour $\alpha \leq 1/3$ et convergente sinon.

Donc

- Pour $\alpha \in (0, 1/3]$

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge,}}$$

- tandis que$\alpha \in (1/3, 1]$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

3) Conclusion :
D'après la question précédente on voit aussi que

$$u_n \sim v_n$$

- Or pour les séries à termes positifs, on a que si

$$u_n \sim v_n$$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Tandis que pour les séries à termes quelconques ceci est faux :

$$\sum u_n \text{ diverge pour } \alpha \leq \frac{1}{3},$$

alors que

$$\sum v_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{converge pour } \alpha > 0,$$

Enoncé

Soit $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$ et $v_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente.
2. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
3. Comparer u_n et v_n et en déduire que $\sum u_n$ est convergente.

1. On a que $2 > \sqrt{3}$ et que

$$q = 2 - \sqrt{3} = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$$

car $2 + \sqrt{3} > 2$. Donc $q \in (0, 1/2)$. De plus

$$0 \leq \sin(\pi q^n) \leq \pi q^n, \quad \forall n \geq 1$$

on a donc puisque $v_n = \sin(\pi q^n)$,

$$0 \leq \sum_{n\geq 1} v_n \leq \pi \sum_{n \geq 1} q^n = \pi \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) = \frac{\pi q}{(1-q)} < \infty$$

donc $\sum v_n$ cvg.

2. On pose

$$s_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(2^p \sqrt{3}^{n-p} + 2^p(-\sqrt{3})^{n-p}\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p \sqrt{3}^{n-p}(1+(-1)^{n-p}) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} \sqrt{3}^{p}(1+(-1)^{p})$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}3^k = 2\omega_n, \quad \omega_n := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}3^k \in \mathbb{N}$$

et on voit que s_n est un multiple de 2 et donc pair.

3. On utilise la question précédente pour écrire :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin(2\pi\omega_n - \pi(2-\sqrt{3})^n) \\ &= \sin(2\pi\omega_n)\cos(\pi q^n) - \cos(2\pi\omega_n)v_n = -v_n \end{aligned}$$

Comme $\sum v_n$ converge d'après la question 1),

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Enoncé

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n := \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right).$$

Ex 8

On note :

$$I_n := \sqrt{n^2+2n+2} = \sqrt{(n+1)^2+1} = (n+1)\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

et on a donc :

$$\begin{aligned} I_n &= (n+1)\left\{1+\frac{1}{2(n+1)^2}+O\left((n+1)^{-4}\right)\right\} \\ &= (n+1)+\frac{1}{2(n+1)}+O((n+1)^{-3}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sin(\pi I_n) &= \sin\left(\pi\left((n+1)+\frac{1}{2(n+1)}+O((n+1)^{-3})\right)\right) \\ &= \cos(\pi(n+1))\sin\left(\frac{1}{2(n+1)}+O((n+1)^{-3})\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2(n+1)}+O((n+1)^{-3})\right) = v_n + w_n \end{aligned}$$

On a donc à nouveau :

$$u_n = v_n + w_n, \quad v_n := \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \quad w_n := \frac{(-1)^n}{n^3}(1 + \varepsilon(n^{-1}))$$

avec

- $\sum v_n$ série alternée et convergente,
- $\sum w_n$ absolument convergente.

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Enoncé

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n := \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$$

On réécrit u_n comme :

$$u_n = \cos\left(-\pi n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$
$$= \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

la fonction $\cos$ étant paire. On utilise ensuite le développement limité :

$$\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4(1+\varepsilon(x))$$

pour écrire que :

$$u_n = \cos\left(\pi\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2}(1+\varepsilon(n^{-1}))\right)\right)$$

On développe ensuite le cosinus de la somme :

$$\begin{aligned}
u_n =& \cos\left(\pi(n+\frac{1}{2})\right)\cos\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}(1+\varepsilon(n^{-1}))\right)\\
&-\sin\left(\pi(n+\frac{1}{2})\right)\sin\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}(1+\varepsilon(n^{-1}))\right)\\
=&-(\sin(\pi n)\cos(\pi/2)+\cos(\pi n)\sin(\pi/2))\sin\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}(1+\varepsilon(n^{-1}))\right)\\
=&-(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}(1+\varepsilon(n^{-1}))\right)\\
=&(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}(1+\varepsilon(n^{-1}))\right\} =: v_n+w_n
\end{aligned}$$

avec

- $\sum v_n$ série alternée et convergente,
- $\sum w_n$ série absolument convergente.

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Ex 10

Enoncé

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n^a := \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3},$$

et

$$v_n^a := \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n + a^2}{n + 2}\right).$$

Ex 10

1. On pose
$$f(x) := \sqrt[3]{1+ax} - \sqrt[2]{1+3x}$$
et on fait le développement limité de f au voisinage de zéro :
$$f(x) = \frac{2a-9}{6}x - \frac{8a^2-81}{72}x^2(1+\varepsilon(x))$$
ce qui donne que
$$\begin{aligned} u_n = nf(1/n^2) &= n\left(\frac{(2a-9)}{6}\frac{1}{n^2} - \frac{(8a^2-81)}{72}\frac{1}{n^4}(1+\varepsilon(n^{-2}))\right) \\ &= \frac{(2a-9)}{6}\frac{1}{n} - \frac{(8a^2-81)}{72}\frac{1}{n^3}(1+\varepsilon(n^{-2})) \end{aligned}$$
Donc on a deux possibilités :
   - soit $a = 9/2$ et alors $\sum u_n$ est absolument convergente,
   - sinon si $a \neq 9/2$ la série $\sum u_n$ diverge.

2. De la même manière on a

$$\ln\left(\frac{n+a^2}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{1+a^2/n}{1+2/n}\right) = \ln(1+a^2/n) - \ln(1+2/n)$$

et on pose à nouveau :

$$g(x) = \ln(1+a^2x) - \ln(1+2x) = (a^2-2)x - \frac{(a^4-4)}{2}x^2(1+\varepsilon(x))$$

et on a

$$f(x) = x - g(x) = (3-a^2)x + \frac{(a^4-4)}{2}x^2(1+\varepsilon(x))$$

et $u_n = f(1/n)$ et on a la dichotomie :

- soit $a = \pm\sqrt{3}$ et on a absolue convergence,
- soit $a \neq \pm\sqrt{3}$ et la série diverge.

Ex 11

Enoncé

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n^{s,q} := \frac{(-1)^n \ln^q n}{n^s}$$

où $s > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Ex 11

1. La série est alternée :

$$u_n^{s,q} = (-1)^n \frac{\ln^q n}{n^s} = (-1)^n |u_n^{s,q}|$$

2. Si on pose

$$f(x) := \frac{\ln^q(x)}{x^s} \text{ avec } s > 0, \quad q \in \mathbb{N}^*$$

alors :

$$f'(x) = \frac{q \ln^{q-1}(x)}{x^{s+1}} - s\frac{\ln^q(x)}{x^{s+1}} = \frac{\ln^{q-1}(x)}{x^{s+1}}(q - s\ln(x))$$

Pour x tel que $q/s < \ln(x)$ i.e. $x \in (\exp(q/s), \infty)$, $f'(x) < 0$, la fonction est donc décroissante. Par ailleurs on a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

car la puissance l'emporte toujours sur le ln. Comme $|u_n^{s,q}| = f(n)$, $\sum u_n^{s,q}$ est semi-convergente.

Enoncé

Étudier la nature de la série de terme général :

$$i)\frac{1}{n+i}, \quad ii)\frac{(-1)^n + i\sin\frac{1}{n}}{n},$$

$$iii)\frac{e^{in\theta}}{n} \ (\theta \in [0, 2\pi[).$$

i) Comme

$$u_n := \frac{1}{n+i} = \frac{n-i}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} - i\frac{1}{n^2+1}$$

la partie réelle diverge puisque $\mathrm{Re}\, u_n \sim 1/n$.

ii) la partie réelle donne une série alternée convergente.

$$\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

donne une série convergente. Donc la série est convergente dans $\mathbb{C}$.

iii) Plusieurs cas de figure :

- si $\theta = 0$ la série est divergente (évident),
- si $\theta = \pi$ la série est alternée et convergente,
- si $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ on applique le critère d'Abel :
  on pose
  $$a_n := \exp(in\theta)$$
  on a alors
  $$\sum_{n \geq 0}^{N} a_n = \frac{1 - \exp(i\theta(N+1))}{1 - \exp(i\theta)}$$
  qui est une série bornée. Par ailleurs, $b_n := 1/n$ est une suite décroissante positive de limite nulle.
  Conclusion du Thm 6 p. 139,
  $$\boxed{\sum a_n b_n \text{ converge.}}$$

Ex 13

Enoncé

La série de terme général

$$u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + e^{i\theta} \ln n},$$

où θ est un paramètre réel, est-elle

- absolument convergente ?
- convergente ?

Ex 13

On factorise $(-1)^n/\sqrt{n}$ et on obtient :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\exp(i\theta)\ln n}{\sqrt{n}}} \right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\exp(i\theta)\ln n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right)$$

On a donc

- pour le module :
$$|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$
et donc la série est absolument divergente
- $\sum u_n$ converge comme somme de
    - deux séries alternées convergentes
    - et une série absolument convergente.

Enoncé

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x \ln x}\, dx$$

Ex 14

On calcule les sommes partielles :

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} u_n = \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x \ln x} dx = \mathrm{Im} \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\exp(ix)}{x \ln x} dx$$

d'après la règle d'Abel pour les intégrales :

$$g(x) := \exp(ix), \quad f(x) := \frac{1}{x \ln x}$$

on a que

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq M, \ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

et on a aussi que f positive, décroissante avec limite nulle en $x = +\infty$, donc

$$\int_{\pi}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

converge.

D'après Exercice 2 (FTD5), on a

$$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x \ln x}\, dx \geq \int_{n\pi+\theta}^{(n+1)\pi-\theta} \frac{|\sin x|}{x \ln x}\, dx$$

$$\geq \min_{x \in (n\pi+\theta, (n+1)\pi-\theta)} |\sin(x)| \int_{n\pi+\theta}^{(n+1)\pi-\theta} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Sur l'intervalle $(n\pi + \theta, (n+1)\pi - \theta)$,

$$|\sin(x)| \geq |\sin(\theta)| \geq \delta > 0$$

et

$$\frac{1}{x \ln x} \geq \frac{1}{(n+1)\,\pi \ln((n+1)\pi)} = v_n$$

On a donc

$$|u_n| \geq \delta(\pi - 2\theta) v_n$$

et $\sum v_n$ diverge