Analyse L2S3
Feuille TD n° 6, séance 16/12/20

Corrections

Vuk Milisic

Laboratoire Analyse Géométrie & Applications

December 16, 2020

Séries entières

Enoncé

1. Soit $z_0 \neq 0$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout z vérifiant $|z| < |z_0|$.
2. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où la suite $(a_n)_n$ vérifie $|a_n| < 2006$ pour tout n ?
3. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où la série $\sum(-1)^n a_n$ converge ?

1. Si la suite $|a_n z_0^n|$ est bornée on pose :

$$\exists C > 0 \; ; \; |a_n z_0^n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on écrit :

$$S_N := \sum_{n=n_0}^{N} |a_n z^n| \leq \sum_n |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq C \sum_n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

le terme de droite est une série géométrique convergente si

$$|z| < |z_0|.$$

2. Si $|a_n|$ est bornée, alors pour tout $|z_0| \leq 1$ la suite $|a_n z_0^n|$ est bornée, on a donc, par la question précédente, que

$$\forall z \ ; \ |z| < 1 \implies \sum_n a_n z^n \text{ cvg}$$

la série $\sum_n a_n z^n$ converge.

Ex 1

2. Si $|a_n|$ est bornée, alors pour tout $|z_0| \leq 1$ la suite $|a_n z_0^n|$ est bornée, on a donc, par la question précédente, que

$$\forall z \ ; \ |z| < 1 \implies \sum_n a_n z^n \text{ cvg}$$

la série $\sum_n a_n z^n$ converge.

3. Par ce qui précède, on peut déjà dire que

$$\forall z \ ; \ |z| < 1 \implies \sum_n a_n z^n \text{ cvg}$$

la série $\sum_n a_n z^n$ converge. De plus si $z = -1$, la série converge aussi donc on a que

$$B_o(O, 1) \cup \{-1\} \subset D$$

dans le plan complexe.

Enoncé

On se donne une suite $(a_n)_n$

- réelle
- positive
- décroissante
- de limite 0

telle que

$$\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ diverge.}}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Ex 2

i) Dans un premier temps les résultats précédents montrent que : a_n est bornée

$$\exists C > 0 \; ; \; 0 \leq a_n \leq C$$

donc $\forall z$ t.q. $|z| < 1$ la série est convergente.

Ex 2

i) Dans un premier temps les résultats précédents montrent que : a_n est bornée

$$\exists C > 0 \ ; \ 0 \leq a_n \leq C$$

donc $\forall z$ t.q. $|z| < 1$ la série est convergente.

ii) On a par contre que pour tout z tel que $|z| = 1$ que

$$\sum_n |a_n z^n| = \sum_n a_n = +\infty$$

la série est donc absolument divergente sur le cercle unité dans $\mathbb{C}$.

iii) On remarque cependant que

$$\sum_n a_n(-1)^n \text{ converge}$$

car on est dans les hypothèses du Thm 5 sur les séries alternées, Mais on est aussi dans les hypothèses du Thm 6 (Abel),

$$\forall z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1, \; z \neq 1, \implies \left| \sum_{n=0}^{N} z^n \right| < +\infty$$

plus les hypothèses sur $(a_n)_n$ impliquent que $\sum a_n z^n$ converge. Donc le domaine de convergence D contient à nouveau

$$B_f(0,1) \setminus \{1\}.$$

donc $\boxed{R \geq 1}$.

Ex 3

Enoncé

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots$
2) $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}+\cdots$
3) $3x+3^4x^4+3^9x^9+\cdots+3^{n^2}x^{n^2}+\cdots$
4) $1+\frac{100x}{1\cdot 3}+\frac{10000x^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1000000x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$
5) $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\cdots$
6) $x+\frac{2^k}{2!}x^2+\frac{3^k}{3!}x^3+\cdots+\frac{n^k}{n!}x^n+\cdots$
7) $x+\frac{2!}{2^2}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\cdots+\frac{n!}{n^n}x^n+\cdots$
8) $x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{(3!)^2}{6!}x^3+\cdots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\cdots$
9) $2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n}+\cdots$
10) $1+x+(2x)^2+(3x)^3+\cdots+(nx)^n+\cdots$
11) $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$

Ex 3

1) On a la somme partielle : (si $x \neq 2$)

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{x}{2}\right)}$$

qui converge si

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

Donc le rayon de convergence est 2 comme le montre aussi le critère de Cauchy :

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |2^{-n}|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

En outre

- si $x = 2$ la série tend vers l'infini
- si $x = -2$ elle n'a pas de limite.

2) Si $a_n = (-1)^n n^{-2}$ alors le critère de D'Alembert donne :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Le rayon de convergence $R = 1$.

Ex 3

2) Si $a_n = (-1)^n n^{-2}$ alors le critère de D'Alembert donne :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Le rayon de convergence $R = 1$.

3) On considère le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$$

et donc $R = 0$.

2) Si $a_n = (-1)^n n^{-2}$ alors le critère de D'Alembert donne :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Le rayon de convergence $R = 1$.

3) On considère le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$$

et donc $R = 0$.

4) On a que

$$a_n := \frac{10^{2n}}{\prod_{p=0}^{n}(2p+1)}$$

et donc :

$$q_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{10^2}{2n+3}, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 0$$

le rayon $R = +\infty$.

5) Si $a_n := 1/(n + \sqrt{n})$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n + \sqrt{n}}{(n+1) + \sqrt{n+1}} \right| = 1$$

On a donc que

$$\boxed{R = 1}$$

Ex 3

6) Si $a_n := n^k/n!$ alors

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)^k}{n^k}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{(n+1)} = 0$$

Le rayon de convergence est donc infini $\boxed{R = +\infty}$.

6) Si $a_n := n^k/n!$ alors

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)^k}{n^k}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{(n+1)} = 0$$

Le rayon de convergence est donc infini $\boxed{R = +\infty}$.

7) Si $a_n := n!/n^n$ alors on écrit le rapport

$$\begin{aligned} q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= (n+1)\exp\left(-(n+1)\ln(n+1) + n\ln n\right) \\ &= \exp\left(-n(\ln(n+1) - \ln n)\right) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Et on a donc $\lim_{n\to\infty} q_n = \exp(-1)$ ce qui donne que $\boxed{R = \exp(1)}$.

8) On pose $a_n = (n!)^2/(2n)!$ et on calcule le rapport

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

on a $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ ce qui donne que $\boxed{R = 0}$.

8) On pose $a_n = (n!)^2/(2n)!$ et on calcule le rapport

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

on a $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ ce qui donne que $\boxed{R = 0}$.

9) On pose $a_n = 2^n/n$ et on calcule le rapport

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

on a $\lim_{n\to\infty} q_n = 2$ ce qui donne que $\boxed{R = \frac{1}{2}}$.

8) On pose $a_n = (n!)^2/(2n)!$ et on calcule le rapport

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

on a $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ ce qui donne que $\boxed{R = 0}$.

9) On pose $a_n = 2^n/n$ et on calcule le rapport

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

on a $\lim_{n\to\infty} q_n = 2$ ce qui donne que $\boxed{R = \frac{1}{2}}$.

10) On pose $a_n = n^n$ et on calcule le rapport

$$\begin{aligned} q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n} &= (n+1)\exp\left(n\ln(1+1/n)\right)) \\ &= (n+1)\exp(1 - 1/n(1+\varepsilon(1/n))) \end{aligned}$$

on a $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ ce qui donne que $\boxed{R = 0}$.

11) si $a_n := 1/n$, on calcule le rapport q_n

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

donc

$$\boxed{R = 1}$$

Enoncé

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ où :

1. $a_n = \cos n$.
2. a_n est la n^{ieme} décimale après la virgule dans le développement décimal de $\sqrt{2}$.

1. La suite $\cos(n)$ est bornée, d'après Ex 1 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1,\ \sum_n a_n z^n \text{converge.}$$

Question : peut-on dire qqchose de plus ?
On suppose dans un premier temps que la

Proposition 1

$$\forall k > 0\ \exists (p_k, q_k)\ ;\ |2\pi p_k - q_k| \leq \frac{1}{k}$$

soit vraie.

Ex 4

On pose

$$a_{p_k} := \cos(p_k).$$

Si on prend z tel que

$$|z| = 1$$

on a alors que

$$\lim_{k\to\infty} |a_{p_k} z^{p_k}| = 1$$

par continuité du cosinus

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \; ; \; \forall k > k_0 \implies |\cos(2\pi q_k) - a_n| < \varepsilon$$

et donc la série $\sum_n a_n z^n$ diverge si $|z| = 1$.

Reste à montrer la proposition :

- On pose $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ la partie décimale de x.
- On vérifie aisément que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [0, 1)$$

- On considère la suite $(f(2\pi\ell))_{\ell \in \{0,\dots,n\}}$ composée $(n+1)$ éléments.
- Ils se répartissent dans *n tiroirs*, $[r/n, (r+1)/n)_{r \in \{0,\dots,n-1\}}$.
- Par la règle des tiroirs, il existe donc r et deux entiers (j, k) t.q. $0 \leq k < j \leq n$, et

$$\frac{r}{n} \leq f(2\pi j), f(2\pi k) < \frac{r+1}{n}$$

Ex 4

- On a donc

$$|f(2\pi j) - f(2\pi k)| = |2\pi \underbrace{(j-k)}_{p_n} - \underbrace{(\lfloor 2\pi j \rfloor - \lfloor 2\pi k \rfloor)}_{q_n}| \leq \frac{1}{n}$$

cqfd.

2. La suite a_n des n-èmes décimales de $\sqrt{2}$ est bornée par 10,

$$\forall z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < 1, \; \sum_n a_n z^n \text{converge.}$$

Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a que $\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n \in \mathbb{N}$, et

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

(sinon contradiction puisqu'à partir d'un certain rang a_n serait nul) et donc pour tout z de module 1, la suite

$$\lim_{n \to \infty} |a_n z^n| \neq 0$$

et donc la série est divergente. Donc

$$D = B_o(0, 1) \subset \mathbb{C}$$

Enoncé

Étudier le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum n^n x^n$
2. $\sum \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n x^n$

Ex 5

1. On a d'après le critère du Théorème 1 p. 148 (Critère de Cauchy series entières)

$$R^{-1} := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} (n^n)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

   Donc le rayon de convergence est nul.

2. De la même manière : si

$$a_n := \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n,$$

   alors

$$R^{-1} := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

   Et donc le rayon de convergence vaut 3.

On peut se demander ce qu'il advient du cas $|z| = 3$, dans ce cas :

$$u_n := |a_n z^n| = \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n |z|^n = \left(\frac{3n}{3n+2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{3n}{3n+2}\right)\right)$$
$$= \exp\left(-n \ln\left(\frac{3n+2}{3n}\right)\right) = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{2}{3n}\right)\right)$$

et l'on a que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \exp(2/3) \neq 0$$

Donc la série diverge pour tout z de module 3.

Enoncé

Soit les séries numérique et entière :

$$S := \sum_{n \geq 0} a_n, \quad T(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad a_n := (-1)^n \frac{(n^2 - 1)}{(n^3 + 2)}$$

1. La série numérique S est-elle convergente ?
2. S est-elle absolument convergente ?
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière T ?
4. Préciser D, le domaine de convergence.

Ex 6

1. La série S est alternée :

$$a_n = (-1)^n |a_n|, \quad |a_n| = \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2}$$

   avec $|a_n|$ suite décroissante de limite nulle à l'infini.
   Par le Théorème 5. p. 137 du cours, on a que $\boxed{S \text{ converge}}$.

2. La série est absolument divergente :

$$|a_n| = \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2} \sim \frac{1}{n}$$

   et par le Corollaire 1 p. 133 du cours $\boxed{\sum |a_n| \text{ diverge}}$.

3. Le terme général est une fraction rationnelle en n,

$$|a_n| = \frac{P(n)}{Q(n)}, \quad P, Q \text{ polynômes}$$

alors

$$R^{-1} := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{P(n+1)}{P(n)} \frac{Q(n)}{Q(n+1)}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{P(n+1)}{P(n)}\right| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{Q(n)}{Q(n+1)}\right| = 1$$

Donc $R = 1$ ce qui veut dire que $\forall z \ ; \ \ |z| < 1$

$\boxed{\text{la série } T(z) \text{ converge.}}$

4. On applique le critère d'Abel :
   - Si $-z \neq 1$, pour tout z de module 1, on a

$$\sum_{n=0}^{N}(-z)^n = \frac{1-(-z)^{N+1}}{1+z}$$

     - c'est une série bornée (la somme partielle oscille entre plusieurs valeurs),
     - par ailleurs, $b_n := |a_n|$ est décroissante de limite nulle

     donc par le Théorème 6 p. 139 du cours, $\boxed{T(z) \text{ converge}}$
   - Si $z = -1$ la série est à terme positifs et $a_n \sim 1/n$ qui diverge.

Finalement $\boxed{T(z) \text{ converge}}$ dans

$$D := B_f(0,1) \setminus \{-1\}$$

(où $B_f(0,1)$ est la boule unité fermée dans $\mathbb{C}$).

Ex 7

Enoncé

Trouver le rayon de convergence R et vérifier s'il y a convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence dans le cas où R est fini.

$$1. \sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}, \quad 2. \sum \frac{x^n}{2n^2 - n}, \quad 3. \sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ex 7

1. On considère d'abord,

$$S(z) := \sum \frac{1}{(n+1)} z^n$$

c'est une série entière et on a que $R = 1$ et on a aussi d'après Abel (Thm 6 p. 139)

$$\forall z \; ; \; |z| = 1, \; z \neq 1, S(z) \text{ converge}$$

On a donc que le domaine de convergence D s'écrit :

$$D = B_f(0, 1) \setminus \{1\}$$

On remarque alors que

$$R(z) = \sum \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n} = S\left(\frac{z+3}{2}\right)$$

On a alors que $R(z)$ converge ssi

$$\frac{z+3}{2} \in D \Leftrightarrow \boxed{z \in B_f(-3, 2) \setminus \{-1\}}$$

2. D'après Ex 6, $R = 1$, de plus pour tout z tq $|z| = 1$, on a

$$\sum_n \left| \frac{z^n}{2n^2 - n} \right| \leq \sum_n \frac{1}{2n^2 - n} < \infty$$

donc la série est absolument convergente et on a donc

$$D = B_f(0, 1) \in \mathbb{C}$$

Ex 7

3. On considère la série

$$S(z) := \sum \frac{z^n}{2n+1}$$

et on a d'après ce qui précède :

$$D_S = B_f(O,1) \setminus \{1\}$$

On a ensuite que

$$T(z) := \sum \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = zS(z^2)$$

donc $T(z)$ converge si

$$z^2 \in D_S \Leftrightarrow \boxed{z \in B_f(O,1) \setminus \{-1,1\}}$$

En effet si $z = r_z \exp(i\theta_z)$ on a

$$(r_z^2, 2\theta_z) \in [0,1] \times \mathbb{R} \setminus \{(1, 2k\pi)_{k\in\mathbb{Z}}\} \Leftrightarrow (r_z, \theta_z) \in [0,1] \times \mathbb{R} \setminus \{(1, k\pi)_{k\in\mathbb{Z}}\}$$

Ex 8

Enoncé

Considérons la série entière $T(x) := \sum_{n \geq 0} a_n 2^n x^n$ où

$$a_n = \sin\left(\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\pi\right).$$

1. Quel-est le rayon de convergence R de cette série ?
2. Cette série est-elle absolument convergente, semi-convergente ou divergente en $x = -R$ (resp. $x = R$) ?

1. On détaille a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \sin(n\pi)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)+\cos(n\pi)\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \\ &= (-1)^n\left\{\frac{\pi}{n+1}+\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^3\left(1+\varepsilon\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)\right\} \end{aligned}$$

Si on applique le critère de d'Alembert, on a

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2\left|\frac{(-1)^n\frac{\pi}{n+2}+O(1/n^3)}{(-1)^n\frac{\pi}{n+1}+O(1/n^3)}\right|=2$$

Ex 8

2. On suppose que $|x| = 1/2$ on a alors d'après le précédent développement :

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_n \left\{ \frac{\pi}{n+1} + \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^3 \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) \right\} (-2x)^n \\
&=: T_s(x) + T_a(x) \\
T_s(x) &:= \sum_n \frac{\pi}{n+1}(-2x)^n, \\
T_a(x) &:= \sum_n \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^3 \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) (-2x)^n
\end{aligned}$$

où la deuxième série $T_a(x)$ est absolument convergente si $|x| = 1/2$.

Ex 8

Reste à considérer $T_s(x)$: en appliquant le critère d'Abel, on a

$$\forall x \in \mathbb{C}\ ;\ |x| = 1/2,\ (-2x) \neq 1 \implies \left|\sum_{n=0}^{N}(-2x)^n\right| < \infty,\ \forall N \in \mathbb{N}$$

la suite $b_n = \pi/(n+1)$ est positive, décroissante de limite nulle. Donc par le Thm 6 p. 139

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}\ ;\ |x| = 1/2,\ (-2x) \neq 1, \quad T_s(x) \text{ converge}}$$

Sinon si $x = -1/2$ la série diverge. En conclusion

$$D_T := B_f\left(0, \frac{1}{2}\right) \setminus \{-1/2\}$$

Enoncé

On considère la série $S(x) := x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$,

1. Quel est le rayon de convergence de S ?
2. Calculer sa somme.

Ex 9

1. S s'écrit sous la forme générale :

$$S(x) = \sum a_n x^n, \quad a_n = n$$

   la suite a_n est polynomiale en n et donc $R = 1$.

2. On réécrit S comme une dérivée en remarquant que :

$$S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' =: xT'(x),\ T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   Mais on sait que

$$T(x) = \frac{1}{1-x} \implies T'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   donc

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Enoncé

1. Soit $u_n(x) = \frac{n+2}{n!}x^n$. Déterminer le rayon de convergence R_1 et calculer la somme $S_1(x) = \sum_{n\geq 2} u_n(x)$.
2. Soit $v_n(x) = \frac{n+2}{(n+1)!}x^{n+1}$. Déterminer le rayon de convergence R_2 et calculer la somme $S_2(x) = \sum_{n\geq 2} v_n(x)$.
3. Soit $w_n(x) = \frac{n+2}{(n-1)!}x^{n-1}$. Déterminer le rayon de convergence R_3 et calculer la somme $S_3(x) = \sum_{n\geq 2} w_n(x)$.
4. Comparer les différentes formes obtenues.

Ex 10

1. Si $u_n(x) = \frac{n+2}{n!}x^n$, on a
$$R^{-1} := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{n+2}\frac{n!}{((n+1)!)} = 0$$
Le rayon est donc infini. On transforme ensuite la série S_1 en
$$S_1(x) = \sum_{n\geq 2} 2\frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{(n-1)!} = 2\left(\exp(x) - 1 - x\right) + \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{(n-1)!}$$
$$= 2\left(\exp(x) - 1 - x\right) + x\left(\exp(x) - 1\right)$$
2. Même calcul de rayon de convergence qu'en 1. : $\boxed{R = +\infty}$
$$S_2(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{n+2}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{n\geq 3} \frac{n+1}{n!}x^n = \sum_{n\geq 3} \left\{\frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\right\}$$
$$= x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x(\exp(x) - 1 - x) + \exp(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

3. Même rayon de convergence $R = +\infty$,

$$S_3(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{n+2}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{n+3}{n!}x^n = \sum_{n\geq 1} \left\{ \frac{x^n}{(n-1)!} + 3\frac{x^n}{n!} \right\}$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x\exp(x) + 3(\exp(x) - 1)$$

4. Au vu des précédents résultats, on vérifie aisément que

$$S_1'(x) = S_3(x), \quad S_2'(x) = S_1(x)$$

ce que l'on voit aussi sur les termes généraux puisque :

$$u_n'(x) = w_n(x), \quad v_n'(x) = u_n(x)$$

Merci pour votre attention