Travaux Dirigés : Optimisation
MACS 2

Vuk Milisic

Année universitaire 2012/2013

1 Notations

On note par $\mathbb{N}$ les nombres naturels, $\mathbb{Z}$ les nombres entiers, $\mathbb{R}$ les nombres réels, $\mathbb{C}$ les nombres complexes. On utilise $(\cdot,\cdot)$ pour désigner le produit scalaire dans l'espace d'Hilbert (de dimension finie ou infinie), $|\cdot|$ pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$, et $\|\cdot\|$ pour toute norme en général.

Des lettres majuscules sont en priorité utilisées pour les matrices, de lettres minuscules en gras pour les vecteurs et lettres minuscules pour des quantités scalaires.

Si A est une matrice, A^* est sa transposé, $\mathrm{Ker}A$ est son noyau et $\mathrm{Im}A$ est l'image.

2 TD 4/10/2012

2.1 Dérivée d'une fonctionnelle quadratique

On définit maintenant J comme

$$J(x) := \frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) - (\mathbf{b},\mathbf{x})$$

Exercice 2.1. Soit $A \in \mathrm{Mat}(N,N)$ une matrice de dimension finie.

i) Calculer formellement la dérivée de $J(x)$.

ii) La dérivée obtenue est définie dans quel sens ?

2.2 Quotient de Raylegh et spectre d'une matrice

Exercice 2.2. Soit $\mathbf{u}$ in vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ une matrice définie positive. On definit la fonctionnelle J telle que :

$$J(\mathbf{u}) := \frac{(A\mathbf{u},\mathbf{u})}{(\mathbf{u},\mathbf{u})}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$$

i) Equation d'Euler-Lagrange associée à ce problème
On suppose qu'un point $\mathbf{u}_0$ realise le minimum λ_0 i.e.

$$\lambda_0 := \min_{\mathbf{u}\ \in \mathbb{R}^d} J(\mathbf{u})$$

  a) Ecrire pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

  $$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \{\ J(\mathbf{u}+\sigma\mathbf{w}) - J(\mathbf{u})\ \}$$

  Que se passe-t-il lorsque $|\mathbf{u}| \to 0$? Cette différentielle définie au sens Gateaux ou Fréchet ? Quelle est sa dimension ?

  b) Que peut-on dire de l'équation d'Euler-Lagrange par rapport au spectre de A ?

ii) Calculer la Hessienne de J par rapport à $\mathbf{u}$, montrer que

$$(J''(\mathbf{u})\mathbf{h},\mathbf{h})$$

n'a pas de signe défini.

iii) Si maintenant A est simplement positive (non définie) ?

iv) Ecrire A si

$$J_1(\mathbf{u}) = \frac{u_1^2}{\sum_{i=1}^d u_i^2}, \quad J_2(\mathbf{u}) = \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2},$$

quel est le minimum de J_2 ? Quel est le spectre de la matrice A associée ? Que peut-on conclure ?

v) On admet le théorème spectral : "Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormé". On suppose que D la matrice diagonale contenant un bloc λ_0Id de taille p avec λ_0 la plus petite valeur propre de A. Les minimiseurs sont-ils uniques ?

vi) Dans cette partie on suppose que
– A symétrique définie positive

– le spectre de A est constitué de valeurs propres simples distinctes, on a donc

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$$

et on associe à chaque valeur propre λ_i son vecteur propre $\mathbf{v}_i$. On note

$$V_i := \mathrm{Span}\{ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1} \}^{\perp}, \quad \forall i \ \geq 1$$

i.e. si $\mathbf{w} \in V_i$ alors

$$\forall j \in \{1, \ldots, i-1\} \quad (\mathbf{w}, \mathbf{v}_i) \equiv 0$$

a) Montrer que

$$\forall \mathbf{w} \in V_i, \quad J(\mathbf{w}) \geq \lambda_i$$

conclure.

b) On définit le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \lambda\{(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 1\}$$

Que donnent les équations d'Euler-Lagrange associées au problème du point selle

$$\partial_{\mathbf{u}}\mathcal{L} = 0, \quad \partial_{\lambda}\mathcal{L} = 0.$$

2.3 Principe de Fermat

Proposition 2.3 (Principe de Fermat). *La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires qui minimisent* (*localement*) le temps de parcours.

Pour la simplicité, on considère la situation en deux dimensions et on utilise la notation (x, y) pour les coordonnées spatiales. Soit $c(x, y)$ la vitesse de la lumière dans le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On fixe les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) et on s'intéresse aux trajectoires (rayons) de lumière entre ces deux points.

Exercice 2.4. En utilisant les notations introduites ci-dessus, exprimer le temps de parcours de la lumière comme une fonctionnelle de la trajectoire $y(x)$.

i) Exprimer un element infinitésimal de trajectoire à l'aide d'une abscisce curviligne

ii) Exprimer un element infinitésimal de temps

iii) On pose maintenant le changement de variable qui de l'abscice curviligne fait passer à la paramétrisation $y := y(x)$ où la trajectoire est maintenant la graphe de la fonction y

iv) Quelle est maintenant la fonctionnelle à minimiser et quelle est l'inconnue ?

Exercice 2.5. À quoi est réduite la fonctionnelle précédente si la vitesse de propagation est homogène dans le milieu ? Quelles sont des trajectoires ?

Exercice 2.6. Considérons l'interface de deux milieux :

$$c(x,y) = \begin{cases} c_1, & x \geq 0, \\ c_2, & x < 0. \end{cases}$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédant (la lumière se propage en ligne droite dans le vide), déduire la loi de réfraction entre deux milieux.