① 18/10/12

# TD d'Optimisation n° 1

## Corrigé

### Ex 2.1

Si $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b,x)$ , $x \in \mathbb{R}^N$

alors sa dérivée dans la direction $h \in \mathbb{R}^N$ s'écrit

$$J'(x).h = \frac{1}{2}\{(Ax, h) + (Ah, x)\} - (b, h)$$
$$= (A^S x - b, h) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^N$$

On peut donc identifier $J'(x)$ avec un vecteur de $\mathbb{R}^N$

$$J'(x) = A^S x - b$$

J est très regulière par rapport à x (elle est en fait infiniment différentiable) et elle est quadratique donc

$$J(x+h) = J(x) + J'(x).h + (J''(x)h, h)$$

Elle est donc differentiable au sens de Frechet et on a par rapport à la définition

$$\varepsilon(h) = \frac{|(J''(x)h, h)|}{\|h\|} < |A^s|_2 \, \|h\|$$

et on a donc bien que

$$\varepsilon(h) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|h\| \longrightarrow 0$$

## Ex 2.2

i) a) On ecrit la differentielle de

$$J(u) = \frac{(Au, u)}{(u, u)}$$

comme differentielle du rapport de $(Au, u)$ sur $(u, u)$ i.e :

$$J'(u).h = \frac{(Au, u)'.h}{(u, u)} + (Au, u)\left(\frac{1}{(u, u)}\right)'.h$$

$$=: I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{(Au, h) + (Ah, u)}{(u, u)}$$

$$= \frac{(2A^s u, h)}{(u, u)} \quad \text{si} \quad A^s = \frac{A + A^*}{2}$$

et

$$I_2 = -\frac{(Au, u)}{(u, u)^2} . \{(u, h) + (h, u)\}$$

$$= -\frac{(Au, u)}{(u, u)^2} . 2(u, h)$$

(3) Ainsi en rassemblant les deux parties on obtient que

$$J'(u).h = \frac{2}{(u,u)} \left\{ \left( A^S u - \frac{(Au,u)}{(u,u)} u , h \right) \right\}$$

$$= \frac{2}{(u,u)} \left( \left( A^S - J(u)\, Id \right) u , h \right) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

Si $u$ n'est pas un vecteur propre : tel que $(A^S - J(u)\, Id)\, u \neq 0$

et que l'on considère

$$J'(\sigma u) = \frac{1}{\sigma} \frac{2}{(u,u)} \left( A^S - J(\sigma u)\, Id \right) u$$

mais $$J(\sigma u) = \frac{(A\sigma u, \sigma u)}{(\sigma u, \sigma u)} = \frac{(Au,u)}{(u,u)}$$

(On dit que $J$ est homogène de d° 0 par rapport à $u$ )

alors

$$J'(\sigma u) = \frac{1}{\sigma} J'(u)$$

Comme $J'(u) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{\sigma \to 0} |J'(\sigma u)| = +\infty}$$

$J$ n'est pas différentiable en zéro $(u = 0)$

(4) NB : $J$ n'est même pas définie elle même en $|u|=0$. En effet prenons deux vecteurs propres distincts de valeurs propres distinctes $(\lambda_1, u_1)$ et $(\lambda_2, u_2)$ tels que

$$\begin{cases} (A - \lambda_1 \mathrm{Id})\, u_1 = 0 \\ \text{et } (A - \lambda_2 \mathrm{Id})\, u_2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$J(\sigma u_1) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad J(\sigma u_2) = \lambda_2$$

$J$ est multi-valuée en $u=0$. En effet

$$\lim_{\sigma \to 0} J(\sigma u_1) = \lambda_1 \neq \lim_{\sigma \to 0} J(\sigma u_2) = \lambda_2$$

Suivant la direction avec laquelle on s'approche de $u=0$ la valeur limite de $J(0)$ change.

ii) <u>Calcul de la Hessienne</u>

On pose la notation du <u>produit tensoriel</u>

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (a_i\, b_j)_{\substack{i \in \{1, \dots, d_1\} \\ j \in \{1, \dots, d_2\}}} \text{ si } (\vec{a}, \vec{b}) \in (\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$$

5) A nouveau on dérive $J'$ comme un rapport de fonctions

$$(J''(u)h, k) = \frac{2}{(u,u)}\left(\left(A^S - J(u)\,Id\right)u, h\right)'.k$$

$$- 2\frac{\left(\left(A^S - J(u)\,Id\right)u, h\right)}{(u,u)^2}\, 2(u,k) \quad =: I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{2}{(u,u)}\Big\{ (A^S h, k) - (J'(u).k)(u,h)$$
$$- J(u)(k,h) \Big\}$$

mais $J'(u).k$ a déjà été calculé on a donc

$$I_1 = \frac{2}{(u,u)}\Big\{ (A^S h, k) - 2\frac{\left(\left(A^S - J(u)\,Id\right)u, k\right)}{(u,u)}(u,h)$$
$$- J(u)(k,h) \Big\}$$

en utilisant la notation tensorielle et en rassemblant tous les morceaux on obtient :

$$J''(u) = \frac{2A^S}{(u,u)} - 4\left[(A^S u \otimes u) + (u \otimes A^S u)\right] / (u,u)^2$$
$$+ 4J(u)(u \otimes u) / (u,u)^2$$
$$- 2J(u)\,Id / (u,u)$$

⑥ si $u = u_0$ alors

$$\left( J''(u_0)\, u_0 \,,\, u_0 \right) = 0$$

ce qui montre que $J''$ n'a pas de signe défini. De plus si on prend $(\lambda_1, u_1)$, $(\lambda_2, u_2)$ comme précédemment avec $\lambda_2 > \lambda_1$ et on suppose de plus que $u_1 \perp u_2$ alors on a

si $A$ symmetrique $(A^S = A)$

$$\left( J''(u_1)\, u_2 \,,\, u_2 \right) = \frac{2}{(u_1, u_1)} \left\{ (Au_2, u_2) - J(u_1)(u_2, u_2) \right\}$$

$$= 2(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{(u_2, u_2)}{(u_1, u_1)} = \frac{2\,|u_2|^2}{|u_1|^2} (\lambda_2 - \lambda_1) > 0$$

et de manière similaire on a

$$\left( J''(u_2)\, u_1 \,,\, u_1 \right) = 2(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{|u_1|^2}{|u_2|^2} < 0$$

$J''$ n'a donc pas de signe défini en tout point $u$.

⑦ iii) Si $A$ définie positive

Alors $A^S = \frac{1}{2}(A + A^*)$ définie positive. Ceci implique que

$$\boxed{\inf_{w \in \mathbb{R}^d} J(w) > 0}$$

Si $A$ positive $A^S$ positive (ou nulle) on peut simplement conclure que

$$\boxed{\inf_{w \in \mathbb{R}^d} J(w) \geq 0}$$

iv) à $J_1(u) = \dfrac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2}$ on peut associer $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tq

$$J_1(u) = \frac{(Au, u)}{(u, u)}$$

Si $J_2(u) = \dfrac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$ on peut proposer plusieurs matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais aussi } A^S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci montre bien que si $A$ non symetrique le spectre de $A$ est différent de $A^S$. En effet

$$\sigma(A) = \{0\}$$ alors que

$$\sigma(A^S) = \{+1/2, -1/2\}$$

v) Si $A = Id$ alors

$$J(u) = 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

les minimiseurs ne sont pas uniques.

Ce résultat se généralise donc en : tout $u$ d'un sous-espace propre associé a la valeur propre $\lambda$ minimise $J$.

Les minimiseurs sont uniques si la dimension du sous espace propre est 1 (valeur propre simple).

vi) a) $A$ symetrique $\Rightarrow$ Il existe une base de vecteurs propres orthonormée de $\mathbb{R}^d$

$v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$ et $|v_i| = 1 \quad \forall i$.

(9) Si $w \in \mathbb{R}^d$ il existe $(\alpha_j)_{j \in \{1,\dots,d\}}$ telle que

$$w = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j v_j$$

si de plus $w \in V_i$ alors

$$w = \sum_{j=i}^{d} \alpha_j v_j$$

$$J(w) = \frac{(Aw, w)}{(w, w)}$$

$$= \frac{\left(A \sum_{j=i}^{d} \alpha_j v_j , \sum_{k=i}^{d} \alpha_k v_k\right)}{\left(\sum_{j=i}^{d} \alpha_j v_j , \sum_{k=i}^{d} \alpha_k v_k\right)}$$

$v_j$ vect. propres

$$= \frac{\left(\sum_{j=i}^{d} \lambda_j \alpha_j v_j , \sum_{k=i}^{d} \alpha_k v_k\right)}{\left(\sum_{j=i}^{d} \alpha_j v_j , \sum_{k=i}^{d} \alpha_k v_k\right)}$$

$(v_j)_j$ orthonormée

$$= \frac{\sum_{j=i}^{d} \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j=1}^{d} \alpha_j^2} \geq \min_{j=\{1,\dots,d\}} \lambda_j = \lambda_i$$

b) La différentielle du Lagrangien s'écrit :

$$\partial_u \mathcal{L} = 2(A^S u - \lambda u) \quad \text{et}$$

$$\partial_\lambda \mathcal{L} = (u,u) - 1$$

(10) Les equations du point selle reclonnent que ce dernier est vecteur propre de norme 1

$$\begin{cases} A^S u = \lambda u \\ \|u\|_2^2 = 1 \end{cases}$$

## Ex 2.4

i) On repère un point dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ par une fonction vectorielle

$$f(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_d(\tau))^* \qquad \tau \in [a,b]$$

on parle du vecteur de deplacement infinitésimal

$$df = \vec{f}(\tau + d\tau) - \vec{f}(\tau) + O(d\tau) = \frac{df}{d\tau} d\tau$$

On note sa norme $ds$ : c'est la longueur infinitesimale parcourue pendant l'incrément $d\tau$

$$\boxed{ds = |df| = \left|\frac{df}{d\tau}\right| d\tau}$$

ii) Si la lumière parcourt la courbe parametrée par $f$ avec en chaque point le module de la vitesse $c(x(\tau))$, un elément infinitesimal de temps devient

$$\boxed{dt = \frac{|df|}{c}}$$

iii) On se place en dimension 2

on pose $x_0 = x$ alors

$$f(x) = (x, y(x))$$

$$ds = \left| \frac{df}{dx} \right| dx = \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx$$

l'inconue devient la fonction $y$ qui minimise le temps de parcours pour aller d'un point $(x_0, y_0)$ au point $(x_1, y_1)$

$$T_{min} = \min \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{c}$$

$$= \min_{y \in K} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{c(x, y(x))}\, dx$$

où $c(x,y)$ est une fonction donnée

et $K = \{ y \in H^1([x_0, x_1])$ telles que $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1 \}$

## Ex 2.5

Ici, $c = c^{ste}$ partant dans le plan $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble des directions admissibles au point $y \in K$ s'écrit

$$K(y) = \{ w \in H^1([x_0, x_1]) \text{ tel que } w(x_0) = 0 = w(x_1) \}$$

On applique le théorème 2.4 du polycopié du cours :

"Thm 2.4 Si J dérivable au sens de Gâteaux il faut que

$$\left(J'(y).w\right) \geq 0 \quad \forall w \in K(y)$$

si $y$ minimise la fonctionnelle dans l'ensemble K."

ainsi il faut calculer $J'(y).w$ d'abord.

$$J'(y).w = \lim_{\sigma \to 0} \frac{J(y+\sigma w) - J(y)}{\sigma}$$

$$Q_\delta := \frac{1}{C\sigma}\left\{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y'+\sigma w')^2}\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{C\sigma}\int_{x_0}^{x_1} \frac{1+(y'+\sigma w')^2 - \left(1+(y')^2\right)}{\sqrt{1+(y'+\sigma w')^2}+\sqrt{1+(y')^2}}\,dx$$

$$\lim_{\sigma \to 0} Q_\delta = \frac{1}{C}\int_{x_0}^{x_1} \frac{y'.w'}{\sqrt{1+(y')^2}}\,dx$$

(13) $K(y)$ est un espace vectoriel $(H_0^1([x_0, x_1]))$

donc

$$(J'(y).w) \geq 0 \quad \forall w \in H_0^1([x_0, x_1])$$

implique que

$$(J'(y).w) = 0 \quad \forall w \in H_0^1$$

i.e :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y' \cdot w'}{\sqrt{1+(y')^2}}\, dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1$$

en faisant une integration par partie on obtient que

$$-\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)' . w = 0 \quad \forall w \in H_0^1$$

Les fonctions test $C_0^\infty([x_0, x_1])$ (fonctions $C^\infty([x_0, x_1])$ a support compact dans $[x_0, x_1]$) appartiennent a $H_0^1$ donc l'egalité devient vraie presque partout $x \in [x_0, x_1]$

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)' = 0$$

Cette dernière égalité implique que

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = k$$

ce qui implique encore que

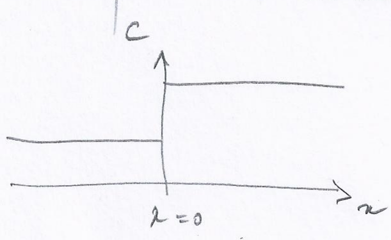
$$y' = \sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}$$

qui se traduit par la linéarité de $y$:

La lumière se propage donc en ligne droite dans des milieux où la vitesse est constante.

<u>Ex 2.6</u> Si $c$ est définie par morceaux

$$c(x) = \begin{cases} c_2 & \text{si } x<0 \\ c_1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$




La fonctionelle à minimiser devient

$$J = \frac{1}{c_2}\int_{x_0}^{0} \sqrt{1+y'}\,dx + \frac{1}{c_1}\int_{0}^{x_1} \sqrt{1+y'}\,dx$$

Le même genre d'arguments montre sur les segments $[x_0;0[ \cup ]0;x_1]$ que $y$ est une fonction linéaire par rapport à $x$

l'inconnue du problème devient alors le point de contact $y_c$ où les deux rayons se coupent. En effet

$$y = \begin{cases} \left\{ (y_c - y_0)\left(\dfrac{x - x_0}{0 - x_0}\right) + y_0 \right\} & x < 0 \\ (y_1 - y_c)\left(\dfrac{x}{x_1}\right) + y_c & \end{cases}$$

et lorsque l'on applique J à y on obtient

$$J(y) = \frac{-x_0}{C_2}\sqrt{1 + \frac{(y_c - y_0)^2}{x_0^2}} + \frac{x_1}{C_1}\sqrt{1 + \frac{(y_1 - y_c)^2}{x_1^2}}$$

qui est maintenant uniquement fonction de la seule inconnue $y_c$ (point de contact entre les deux rayons)

$$\tilde{J}(y_c) = J(y)$$

Minimiser J c'est minimiser $\tilde{J}$ en $y_c$ donc une condition nécessaire est que

$$\tilde{J}(y_c)' = 0$$

Soit encore

(16) $$\tilde{J}'(y_c) = \frac{(y_0 - y_c)}{C_2\sqrt{x_0^2 + (y_c - y_0)^2}} - \frac{(y_1 - y_c)}{C_1\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y_c)^2}}$$

$$= 0$$

si on note $v_i$ le vecteur incident renormalisé et $v_r$ le vecteur "refléchi" renormalisé

$$v_i = \frac{\begin{pmatrix} (x_0 - 0) \\ (y_0 - y_c) \end{pmatrix}}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 - y_c)^2}} \qquad v_r = \frac{\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ y_1 - y_c \end{pmatrix}}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y_c)^2}}$$

on a alors bien que

$$\frac{v_{i,2}}{C_2} = \frac{v_{r,2}}{C_1}$$

si $\theta_i$ est l'angle tq $v_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \end{pmatrix}$

et $\theta_r$ — " — $v_r = \begin{pmatrix} \cos\theta_r \\ \sin\theta_r \end{pmatrix}$

on obtient bien la loi de Snell Descartes

$$\boxed{\frac{1}{C_2} \sin\theta_i = \frac{1}{C_1} \sin\theta_r}$$