Optimisation TD # 2 : 18/10/12

Exercice 0.1. On définit les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} x^3/y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$$
$$f_3(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & y = x^2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque fonction, étudier au point $(0,0)$ la continuité et la différentiabilité (au sens de Gâteaux et Fréchet).

Exercice 0.2. Calculer la dérivée fonctionnelle :

$$\begin{aligned} J_1(x,y) &= 2x^2 - 2xy + y^2, \\ J_2(x,y) &= 2 + x^2\sqrt{y^2+1}, \\ J_3(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 0.3. Dérivée de normes

1. Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire et de la norme issue du produit scalaire. Calculer la dérivée au sens de Gâteaux de cette norme. Que se passe-t-il en zéro ?
2. On veut calculer la dérivée de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $E := \mathbb{R}^d$ définie par

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,d\}} |x_i|$$

A cette fin on définit l'ensemble $U := \{x \in E \text{ t.q. } \exists! i_0 \in \{1,\dots,d\} \|\mathbf{x}\|_\infty = |x_{i_0}|\}$

i) Quand $d = 2$ dessiner U. Montrer que U est ouvert

ii) Montrer que pour tout $x \in U$ il existe une boule $B(x,\epsilon)$ telle que pour tout $y \in B(x,\epsilon)$ on ait $\|\mathbf{y}\|_\infty = |y_{i_0}|$

iii) Quelle est la dérivée de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$?

iv) Montrer que la dérivée n'est pas continue hors de U

Exercice 0.4. Soient $B \in \mathrm{Mat}(n,m)$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. Calculer les dérivées pour :

$$J_1(\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x} - c\|^2, \quad J_2(\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x} - c\| := \sqrt{(B\mathbf{x} - c, B\mathbf{x} - c)}.$$

Exercice 0.5. Soient $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n)$. Calculer les dérivées pour les fonctionnelles suivantes :

$$\mathrm{Tr}(A), \quad \det(A), \quad \mathrm{Tr}(A^{-1}), \quad \mathrm{Tr}(AB).$$