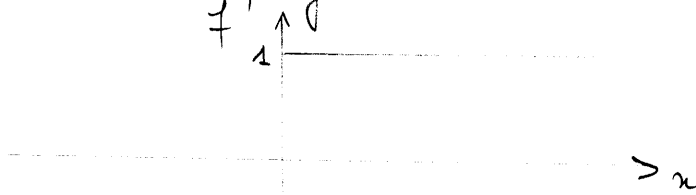


Corrigé

Ex 0.1

$f_1 = \alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une fonction continue en $\alpha = 0$

mais sa dérivée admet deux valeurs à gauche et à droite de $\alpha = 0$



elle n'est donc ni Gâteaux ni Fréchet différentiable dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$ la même chose se produit indépendamment de y

$$f_2 = \begin{cases} x^3/y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

En faisant le chang^t de variable en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$f_2 = r^2 \cdot \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta}$$

qui n'est pas

bornée au voisinage de $\theta = 0$

On ne peut donc pas prolonger f_2 par continuité à zéro ($y = 0$)

Hors de $\{y = 0\}$ f_2 est $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Donc Fréchet et Gâteaux différentiable.

$$\textcircled{2} \quad f_3 = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } y = x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_3 n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$: il suffit de s'approcher de $y = x^2$ dans la direction normale à la courbe ($n = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$) ainsi $f_3(X \pm \sigma n) - f_3(X) = -f_3(X)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$ on n'a donc pas continuité ni dérivabilité.

Dans la direction tangente à la courbe ?
 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$

$$\nabla f_3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} \quad \nabla f_3(X) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^4}} \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x^4}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(X) \cdot v = \frac{x + 2x^3}{\sqrt{x^2 + x^4}} = \operatorname{sgn} x \left(\frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

f_3 admet une dérivée dans la direction tangente au tout $x \neq 0$

En $x = 0$ f_3 est discontinue,

③ Ex 0.2 i) $J_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x, x$

donc $J_1'(x) = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$

ii) $J_2(x, y) = 2 + x^2 \sqrt{y^2 + 1}$

$\nabla J_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \sqrt{y^2 + 1} \\ \frac{x^2 y}{\sqrt{y^2 + 1}} \end{pmatrix}$

iii) $J_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En utilisant les coordonnées cylindriques
on

$J_3(x, y) = \tilde{J}_3(r, \theta) = \begin{cases} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \boxed{0} \text{ sinon} \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ (r, \theta) \neq (0, 0) \\ \neq (0, 2\pi) \end{matrix}$

donc on peut prolonger J_3 par continuité
en $(0, 0)$ car

$|J_3(x, y)| < C |x^2 + y^2|$ au voisinage de
zero

$\nabla J_3 = \begin{bmatrix} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix}$

Ex 0.3 1) H hilbert produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ (4)
 de $H^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $|u|_H = \sqrt{(u, u)_H}$

$$\frac{|u + \sigma h|_H - |u|_H}{\sigma} = \frac{(u + \sigma h, u + \sigma h) - (u, u)}{\sigma (|u + \sigma h| + |u|)}$$

$$= \left(\frac{u}{|u|}, h \right)_H + o(\sigma) \Rightarrow J'(u) = \frac{u}{|u|}$$

H hilbert admet base orthonormée

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} J'(\sigma w) \neq \lim_{\sigma \rightarrow 0} J'(\sigma u)$$

Donc pas unicité de la limite lorsque $|u| \rightarrow 0$ par valeurs différentes.

La dérivée n'est pas continue donc

J n'admet pas de dérivée au sens de Gâteaux (cf cours par la définition).

2) a) U est-il ouvert ?

Oui si pour tout élément x de U $\exists B(x, \varepsilon)$
 tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. (NB B Boule pour la norme $||\cdot||_\infty$)

Si $x \in U$ $\exists \varepsilon_0 / |x_{i_0}| > |x_i| + \varepsilon \ \forall i \neq i_0$
 prenons $y \in B(x, \varepsilon)$ i.e $|x - y|_\infty < \varepsilon$

$$\text{Si } |x_{i_0}| > |x_i| + \delta \quad (5)$$

$$\text{alors } \begin{cases} \text{Soit } x_{i_0} < -|x_i| - \delta \\ \text{Soit } x_{i_0} > |x_i| + \delta \end{cases}$$

or ds premier cas

$$y_{i_0} < x_{i_0} + \varepsilon < -|x_i| - \delta + \varepsilon < -|y_i| - \delta + 2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow = -|y_i|$$

$$\text{sinon si } x_{i_0} > |x_i| + \delta$$

$$y_{i_0} > x_{i_0} - \varepsilon > |x_i| + \delta - \varepsilon > |y_i|$$

$$\text{si } \varepsilon = \frac{\delta}{2}$$

Comme les inégalités sont strictes on a

$$\text{bien si } \varepsilon = \delta/2 \quad \text{qm } |y_{i_0}| > |y_i| \quad \forall i \neq i_0$$

$$\text{donc } y \in U \quad \text{donc } B(x, \delta/2) \subset U$$

$$\text{avec } \delta = \min |x_{i_0}| - |x_i|.$$

ii) Conséquence si i_0 tq $|x_{i_0}| > |x_i| \quad \forall i$
 toute part $y \in B(x, \delta/2)$ on a encore
 que $|y_{i_0}| > |y_i| \Rightarrow x \in B(x, \delta/2)$

$$\|y\|_\infty = y_{i_0} \quad \forall y \in B(x, \delta/2)$$

iii) La dérivée de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ est
 la fonction

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On peut l'obtenir par exemple
 comme limite de $\sqrt{x^2 + \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} |x|$

$\sqrt{x^2+5}$ est une fonction dérivable (6)

Conclusion: la dérivée de $\|\cdot\|_\infty$ sur U
s'écrit $\|x\|_\infty' = \text{egal } e_{i_0}$ $\forall x \in U$
où i_0 est tel que $|x_{i_0}| > |x_i| \forall i \neq i_0$

iv) Prenons en toute généralité le cas
où $\max_i |x_i| = |x_1| = |x_2|$
et on considère la direction de dérivation
 e_2

Si on prend σ négatif

$$\frac{1}{\sigma} \|x + \sigma e_2\|_\infty - \|x\|_\infty = \frac{x_1 - x_1}{\sigma} = 0$$

Si σ positif

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \|x + \sigma e_2\|_\infty - \|x\|_\infty &= \frac{x_2 + \sigma - x_1}{\sigma} = \frac{x_2 + \sigma - x_2}{\sigma} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Hors de U $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable

Ex 0.4 Calcul de dérivées

$$J_1 = \|Bx - c\|^2 = (Bx - c, Bx - c)$$

$$J_1'(x) \cdot h = (Bx - c, Bh)$$

$$+ (Bh, Bx - c)$$

$$= 2(B^* B x - B^* c, h)$$

$$J_2 = \sqrt{J_1}$$

(7)

Donc $J_2'(x)h = \frac{J_1'(x) \cdot h}{2\sqrt{J_1}}$

$$= \frac{(2(B^*Bx - B^*c), h)}{2\sqrt{J_1}}$$

$$= \left(\frac{B^*Bx - B^*c}{\|Bx - c\|} \right) \cdot h$$

Ex 0.5 i) Tr est une fonction Linéaire de son argument i.e.

$$\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii} \quad \text{si} \quad (a_{ij})_{ij} = A$$

On a donc aisément

$$\frac{\text{tr}(A + \sigma H) - \text{tr}(A)}{\sigma} = \frac{\text{tr}(\sigma H)}{\sigma}$$

$$= \text{tr}(H)$$

ii) Determinant est une fonction n -linéaire de ses arguments. C'est ce que l'on essaye d'établir

$$Q_5 = \frac{1}{\sigma} \{ \det(A + \sigma H) - \det(A) \} =$$

$$\frac{1}{\sigma} \left\{ \det \begin{pmatrix} A_1 + \sigma H_1 & A_2 + \sigma H_2 & \dots & A_n + \sigma H_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} - \det(A) \right\}$$

⑧ On A_i représente la i -ème colonne de A

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\delta} \left\{ \det (A_1 + \sigma H_1, A_2 + \sigma H_2, \dots, A_n + \sigma H_n) \right. \\
 &\quad - \det (A_1, A_2 + \sigma H_2, \dots, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad + \det (A_1, A_2 + \sigma H_2, \dots, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad - \det (A_1, A_2, A_3 + \sigma H_3, \dots, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad + \det (A_1, A_2, A_3 + \sigma H_3, \dots, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad - \det (A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad + \det (A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad \left. - \det (A_1, \dots, A_n) \right\} \\
 &= \frac{1}{\delta} \left\{ \det (\sigma H_1, A_2 + \sigma H_2, \dots, A_n + \sigma H_n) \right. \\
 &\quad + \det (A_1, \sigma H_2, A_3 + \sigma H_3, \dots, A_n + \sigma H_n) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. + \det (A_1, \dots, A_{n-1}, \sigma H_n) \right\}
 \end{aligned}$$

le déterminant étant une fonction n linéaire

$$Q_\delta = \sum_i \det (A_1, \dots, A_{i-1}, H_i, A_{i+1} + \sigma H_{i+1}, \dots, A_n + \sigma H_n)$$

$$\text{donc } \lim_{\sigma \rightarrow 0} Q_\delta = \sum_i \det (A_1, \dots, A_{i-1}, H_i, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

par continuité des $\det (A_1, \dots, A_{i-1}, H_i, A_{i+1} + \sigma H_{i+1}, \dots, A_n + \sigma H_n)$
par rapport à σ

⑨ Chaque $q_i := \det (A_1, \dots, A_{i-1}, H_i, A_{i+1}, \dots, A_n)$ peut lui-même s'écrire comme

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_j \det (A_1, \dots, A_{i-1}, e_j, A_{i+1}, \dots, A_n) \\ &= \sum_j \det (A_1, \dots, A_{i-1}, e_j, A_{i+1}, \dots, A_n) H_{ij} \end{aligned}$$

mais $\det (A_1, \dots, A_{i-1}, e_j, A_{i+1}, \dots, A_n)$ n'est autre qu'un élément de la matrice des cofacteurs de A ou a donc

$$Q_0 = \sum_{ij} (\text{Cof } A)_{ij} H_{ij} = \text{Cof } A : H$$

ou encore

$$Q_0 = \text{tr} (\text{Cof } A^T, H)$$

On se rappelle alors que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Cof } A^T$$

$$\boxed{Q_0 = \det A \text{ tr} (A^{-1} H)}$$

iii) $\text{Tr} (A^{-1})$ est la composition de Tr et A^{-1} on applique donc la formule de dérivée de la composée de deux fonctions

$$(A^{-1})' \cdot H \quad ?$$

(10)

$A A^{-1} = Id$ cette égalité contient un produit que l'on dérive

$$(A A^{-1})' \cdot H = 0$$

$$A' \cdot H A^{-1} + A (A^{-1})' \cdot H = 0$$

Mais $A' \cdot H = H$ par linéarité
on a donc

$$A (A^{-1})' \cdot H = - H A^{-1}$$

on multiplie cette expression par A^{-1} à gauche et on obtient

$$A^{-1} \cdot H = - A^{-1} H A^{-1}$$

NB: Il n'est pas possible d'exprimer $A^{-1} \cdot H$ sans H

$$(tr(A^{-1}))' = - tr(A^{-1} H A^{-1})$$

$$ir) \quad tr(AB)' \cdot H$$

$$= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{tr((A + \sigma H)B) - tr(AB)}{\sigma}$$

$$= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{tr(\sigma HB)}{\sigma} = tr(HB)$$