Optimisation MACS 2:
Devoir à la maison

Olivier Lafitte (cours)   Vuk Milisic (travaux dirigés)

12 octobre 2012

Exercice 1

On considère les fonctionnelles

$$J_0(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}dx, \text{ et } J(y) = \int_0^1 f(y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

1. Calculer, pour tout $y \in H^1([0,1])$, et pour tous $w, w_1, w_2 \in H^1([0,1])$, $(J_0'(y), w)$ et $(J_0''(y)w_1, w_2)$.

2. Démontrer que J_0 est convexe sur $H^1([0,1])$ et strictement convexe sur $H_0^1([0,1])$. Est ce que J_0 est $\alpha-$convexe sur $H_0^1([0,1])$?

3. Soit ϕ une fonction de classe C^1. Déterminer l'inf de $y \to J_0(y) - \int_0^1 y(x)\phi'(x)dx$ sur $H^1([0,1])$ puis sur $H_0^1([0,1])$. On trouvera $\frac{dy}{dx}$ dans les deux cas.

4. Calculer $(J'(y), w)$ et $(J''(y)w, w)$. Est ce que f convexe suffit à conclure sur la convexité de J?

5. Dans le cas où $f(y) = y^2$, démontrer que J est $\alpha-$convexe sur $H^1([0,1])$ si la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2y(x)y'(x)}{1+(y'(x))^2} \\ \frac{2y(x)y'(x)}{1+(y'(x))^2} & \frac{y^2}{(1+(y'(x))^2)^2} \end{pmatrix}$$
a ses valeurs propres supérieures à α pour tout x.

Exercice 2

Quelle est la meilleure constante de Poincaré sur un disque centré en zero $D(0, R_0)$? Pour répondre à cette question on propose de répondre à plusieurs sous-questions :

i) écrire l'énergie à minimiser sous la forme contrainte dans $H_0^1(D)$

ii) écrire les équations de Lagrange associées

iii) écrire l'opérateur Laplacien en coordonnées cylindriques (ρ, θ)

iv) en faisant l'hypothèse que l'on peut faire une séparation de variables $u = \Theta(\theta)R(\rho)$ montrer que cela revient à résoudre des problèmes spectraux découplés.

v) quelle est alors la constante optimale de Poincaré ?

vi) comment varie cette dernière quand R_0 change de valeur ?

Exercice 3

On considère deux courbes $C_f = \{y = f(x)\}$, $C_g = \{y = g(x)\}$ caractérisées par deux fonctions f et g de classe C^1 sur I, un intervalle non nécessairement de mesure finie. On cherche le minimum, si il existe, de la distance entre les deux courbes.

1. Identifier la solution dans le cas où les courbes se croisent.

2. Sur un exemple, démontrer que si $I = R$, il n'y a pas existence du minimum.

3. On suppose désormais $I = [0, 1]$. Déterminer, pour un point $(x_1, f(x_1))$ donné, le minimum de la distance de C_g à ce point.

4. On se place enfin sur $I \times I \times f(I) \times g(I)$ pour résoudre ce problème. On introduit $J(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. En utilisant deux multiplicateurs de Lagrange λ et μ, prouver que si le minimum est atteint à l'intérieur du pavé d'étude, alors les deux courbes ont même normale et que son équation est $x_2 - x_1 + f'(x_1)(y_2 - y_1) = 0$.

5. Application à $I = [-1, 1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2 + \theta$ (on étudiera en premier le cas $\theta = \frac{1}{8}$ puis on discutera sur les valeurs de θ et on étudiera particulièment le cas $\theta > \frac{1}{4}$).