Devoir à la maison n°2

à rendre pour le 7/1/2012

Exercice 0.1. Soit $A \in \mathrm{Mat}(N,N)$ une matrice symétrique définie positive. On définit la fonctionnelle J comme

$$J(x) := \frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) - (\mathbf{b},\mathbf{x})$$

L'algorithme du gradient conjugué s'écrit :

$$\mathbf{d}_0 := -J'(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{d}_n := -J'(\mathbf{u}_n) + \beta_n \mathbf{d}_{n-1}, \quad \rho_n := \frac{|J'(\mathbf{u}_n)|^2}{(A\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_n)}, \quad \beta_n := \frac{|J'(\mathbf{u}_n)|^2}{|J'(\mathbf{u}_{n-1})|^2}$$

partant de $u_0 \in \mathbb{R}^n$, une suite (u_n) est construite telle que :

$$\mathbf{u}_{n+1} \in \mathbf{u}_n + G^n, \quad J(\mathbf{u}_{n+1}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{u}_n + G^n} J(\mathbf{v})$$

avec $G^n = \mathrm{Vect}\{\ J'(\mathbf{u}_0), \ldots, J'(\mathbf{u}_n)\}$. On note $\|\mathbf{v}\|_A^2 = (A\mathbf{v},\mathbf{v})$ pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

1. Vérifier que
$$J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\ \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|_A^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$
2. Montrer par récurrence que l'espace G^n est engendré par $\mathrm{Vect}\{J'(\mathbf{u}_0), AJ'(\mathbf{u}_0), \ldots, A^nJ'(\mathbf{u}_0)\}$.
3. Pour tout $k \geq 0$, on pose $e^k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}$.
   a) Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{u}_n + G^n$. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré n t.q. $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + Q(A)J'(\mathbf{u}_0)$.
   b) En utilisant l'algorithme et la question précédente montrer que
   $$\left\|e^{n+1}\right\|_A = \min\{\left\|P(A)e^0\right\|_A, \quad P \in \mathcal{P}_{n+1}\}$$
   où $\mathcal{P}_{n+1}$ désigne l'ensemble des polynômes P de degré n t.q. $P(0) = 1$.
4. En décomposant e_0 dans la base orthonormé associée à A montrer que : $\|P(A)e^0\|_A^2 \leq \|e^0\|_A^2 \max_i P^2(\lambda_i)$ pour tout $P \in \mathcal{P}_{n+1}$. En utilisant que
$$\min_{p \in \mathcal{P}_k} \|p\|_{L^\infty(a,b)} = T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$$

où T_k désigne le polynôme de Tchebychev de degré k et l'estimation

$$T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}+1}\right)^k, \quad \text{si } b > a$$

déduire que

$$\|e^n\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1}\right)^n \|e^0\|_A$$

où γ est le nombre de conditionnement, i.e. $\gamma = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

Exercice 0.2. On se propose d'étudier la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$J(w) = \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |w|^4\, dx - \int_\Omega fw\, dx$$

ou w est une fonction de $H_0^1(\Omega)$, c-a-d qui s'annule sur le bord.

1. Monter que la fonctionnelle J est infinie à l'infini
2. La fonctionnelle est-elle convexe ? α convexe ?
3. Calculer son gradient G et son hessien H. Ces fonctionnelles sont elles continues ?
4. On pose $U = \{v \in V, J(v) \leq J(u_0)\}$. Quelle propriété de J garantit que U soit borné. Montrer que U est aussi un convexe fermé.
5. On se propose de résoudre de manière itérative ce problème. On pose le schéma : Pour tout $k \geq 0$ étant donné u_k on répète les étapes suivantes :
   - trouver w_k solution du système

   $$H(u_k)(w_k, \varphi) = -(G(u_k), \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

   - on incrémente u_k

   $$u_{k+1} = u_k + w_k$$

   (i) on note $G = \sup_{w\in U} |G(u)|$, montrer que si $u_k \in U$ alors l'on a

   $$\|w_k\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 G,$$

   et l'on précisera de quoi dépend la constante c_1.

   (ii) en déduire que si $u_k \in U$ alors $u_{k+1} \in U_1$ avec

   $$U_1 = \{v \in V, ||v - w|| \leq c_1||G||, w \in U\}$$

   cet ensemble est il plus petit, plus grand ou disjoint de U ?

6. Ecrire les acroissements finis à l'ordre 2 pour la fonctionnelle J , utiliser le problème linéaire sur w_k et trouver un minorant de $J(u_k) - J(u_{k+1})$ en fonction de la norme de w_k de la forme

$$J(u_k) - J(u_{k-1}) \geq c_2 \|w_k\|^2_{H^1(\Omega)} (c_3 - \|w_k\|_{H^1(\Omega)})$$

   Si β est la constante de Lipschitz de H preciser son influence sur les constantes c_2 et c_3.
7. Pour quelles valeurs de $\|w_k\|_{H^1(\Omega)}$, le terme de droite de l'inégalité précédente reste-t-il positif, et que conclue-t-on dans ce cas ? Quelle est la dépendance par rapport à β ?
8. Dans le cas contraire (si le membre de droite change de signe) que peut-on dire ?
9. Pour agrandir le rayon de la borne inf, on ajoute un terme de stabilisation à l'étape (1) qui devient :

$$H(u_k)(w_k, \varphi) + \gamma(G(u_k), w_k)(G(u_k), \varphi) = -(G(u_k), \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

   (a) vérifier que la forme bilinéaire ajoutée est bicontinue pour u_k fixé, et coercive en précisant la constante de coercivité.
   (b) Ajuster γ pour que la borne inf sur $J(u_k) - J(u_{k-1})$ soit uniforme par rapport à la taille de $\|w_k\|_{H^1(\Omega)}$.
10. Déduire que $u_k \in U$ pour tout k.
11. Montrer que
   (a) $J(u_k)$ admet une limite
   (b) w_k tend vers zéro
   (c) l'on a l'encadrement : il existe c_4, c_5 telles que

$$c_4 \|u_{k+1} - u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_{k+1} - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_5 \|u_{k+1} - u_k\|_{H^1(\Omega)}$$

   (on demande l'expression précise des constantes c_4 et c_5).
   (d) l'on a convergence quadratique :

$$\|u_{k+1} - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_6 \|u_k - u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

   et préciser la valeur de la constante c_6 en fonction des données du problème.
12. Comment se comporte le schéma quand μ varie ? En particulier quand μ devient petit ?