Exercice 1 :

Soient A, B et C trois évènements. Simplifier :

1) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
2) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B)$
3) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

Exercice 2 :

On se donne A, B et C trois évènements. En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de passage au complémentaire, représenter les évènements suivants :

a) seul A se produit
b) A et B sont réalisés mais pas C
c) les trois se produisent en même temps
d) deux seulement se produisent
e) aucun des trois ne se produit
f) au moins deux se produisent
g) un et un seul se produit

Exercice 3 :

Soit E un ensemble et A, B et C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

1) si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$
2) si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$.

Exercice 4 :

On considère une calculatrice et on regarde si oui ou non elle présente un défaut.

a) Quel est l'univers.
b) Est-ce un univers dénombrable. Quel est son cardinal ?
c) Mêmes questions si considère 25 calculatrices. Quel est le cardinal de Ω
d) Dans le deuxième cas construire $\mathcal{P}(\Omega)$, quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$?
e) Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

Exercice 5 :

Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille arbitraire de σ-tribus définies sur un espace abstrait Ω.
Montrer que $H := \cap_{\alpha \in A} G_\alpha$ est aussi une σ-tribu.

Exercice 6 :

Montrer que :

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
b) $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$
c) $(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{A}$ une σ-tribu de parties de Ω et soit $B \in \mathcal{A}$.

a) Montrer que $\mathcal{F} := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$est une σ-tribu de sous-ensembles de B.
b) Cela reste-t-il vrai si $B \subset \Omega$ n'est pas dans $\mathcal{A}$?

Exercice 8 :

Soit f une application t.q. $f : \Omega \to E$ avec $\mathcal{E}$ la tribue associée à E. Soit $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{E}$ avec $A = f^{-1}(B)\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-tribu sur Ω.

Exercice 9 :

Soit A et B deux évènements, monter que si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

Exercice 10 :

On se donne A, B et C trois évènements,

1) montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2) en déduire $P(A \cup B \cup C)$.

Exercice 11 :

Dans une entreprise, il y a 800 employés, 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes syndiqués et mariés.

Combien y-a-t-il de femmes célibataires non-syndiquées ?

Exercice 12 :

Dans un groupe, 65% des personnes possèdent un smartphone, 35% un ordinateur et 25% une tablette tactile. On notera les évènements :

A : posséder un smartphone
B : posséder un ordinateur
C : posséder une tablette

De plus 45%, 20% et 5% d'entre eux possèdent, respectivement, uniquement un smartphone, un ordinateur, une tablette.

Finalement, 5% des personnes possèdent les trois et 5% ne possèdent aucun des trois.

1) Calculer $P(A \cap B \cap C^c)$
2) Les évènements $A \cup B$ et $A^c \cap B^c$ sont-ils incompatibles ?

Exercice 13 :

Soient A, B et C des évènements. On pose $E_1 := A \cap B^c \cap C^c$ et $E_2 := A \cap (B \cup C)$.

1) Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2) Déterminer l'évènement $E_1 \cup E_2$ et calculer sa probabilité.
3) On sait que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.3$, $P(B \cap C) = 0.1$, $P(A \cap C) = 0.1$, $P(A \cap B) = 0.2$ et $P(A \cap B \cap C) = 0.05$.
   a) Calculer $P(B \cup C)$ et $P(A \cup B \cup C)$
   b) En déduire $P(E_1)$ et $P(E_2)$.