Sauf mention contraire, dans tous les exercices l'espace probabilisé est fixé, et A, B, A_n, etc sont des évènements.

Exercice 1 :

Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors A et B ne peuvent pas être indépendants sauf si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Exercice 2 :

Soit $P(C) > 0$, montrer que $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

Exercice 3 :

Soit $P(C) > 0$, et $A_1, \dots, A_n$ soient tous disjoints deux à deux. Montrer que

$$P\left(\cup_{i=1}^n A_i \mid C\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i \mid C)$$

Exercice 4 :

Montrer que si $P(B) \in (0, 1)$ et A un évènement on a :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

Exercice 5 :

On définit $\Omega := \{a, b, c\}$

1) Donner une tribu associée
2) On construit une probabilité P telle que
   a) $P(\{a, b\}) = 1/4$, combien y-a-t-il d'applications que l'on peut définir satisfaisant cette seule contrainte ?
   b) Même question si de plus $P(\{b, c\}) = 1/4$.

Exercice 6 :

On tire au hasard un entier entre 1 et 900.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit pair mais non divisible par 4 ni par 6
2. Ecrire un petit programme en R pour tester le resultat précédent.

Exercice 7 :

Les dons de sang font l'objet d'un dépistage du sida. Supposons que le test ait une précision de 99 %, et qu'une personne sur dix mille de votre groupe d'âge soit séropositive. Le test a également un taux de faux positifs de 5%. Supposons que le test vous donne un résultat positif. Quelle est la probabilité que vous ayez le sida ? Est-elle de 99 % ?

Exercice 8 :

Supposons que nous modélisions le lancer d'une pièce de monnaie avec deux résultats, H et T, représentant Pile et Face. Soit $P(H) = P(T) = 1/2$. Supposons maintenant que nous lancions deux pièces de ce type, de sorte que l'espace d'échantillonnage de ces pièces Ω se compose de quatre points : $\{HH, HT, TH, TT\}$. Nous supposons que les lancers sont indépendants.

a) Trouvez la probabilité conditionnelle que les deux pièces tombent pile étant donné que la première tombe pile (réponse : 1/2).
b) Trouvez la probabilité conditionnelle que les deux pièces tombent pile étant donné qu'au moins l'une d'entre elles tombe pile (réponse : 1/3).

Exercice 9 :

Une boîte contient r boules rouges et b boules noires. On choisit une boule au hasard dans la boîte (de façon à ce que chaque boule ait la même probabilité d'être choisie), puis on tire une deuxième boule au hasard parmi les boules restantes dans la boîte. Trouvez les probabilités que

a) les deux boules soient rouges,
b) la première boule soit rouge et la seconde soit noire.

Exercice 10 :

L'urne de Polya. Une urne contient r boules rouges et b boules bleues. On choisit au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur et on la remet avec d boules de la même couleur. Cette opération est répétée indéfiniment. Quelle est la probabilité que

a) la deuxième boule soit bleue ?

b) la première boule soit bleue sachant que la deuxième boule est bleue ?

Exercice 11 :

Une compagnie d'assurance assure un nombre égal de conducteurs et de conductrices. Au cours d'une année donnée, la probabilité qu'un conducteur masculin ait un accident impliquant un sinistre est α, indépendamment des autres années. La probabilité analogue pour les femmes est β. Supposons que la compagnie d'assurance choisisse un conducteur au hasard.

1) Quelle est la probabilité que le conducteur choisi fasse une demande d'indemnisation cette année ?
2) Quelle est la probabilité que le conducteur sélectionné fasse une demande d'indemnisation au cours de deux années consécutives ?
3) Quelle est la probabilité que la personne qui fait la réclamation soit une femme ?

Exercice 12 :

A et B jouent à lancer la même pièce de monnaie à tour de rôle : le gagnant est celui qui fait apparaître face auquel cas le jeu s'arrête. Le jeu est limité à trois lancers maximum et c'est A qui commence. On joue une seule partie.

1) Construire l'espace de probabilité modélisant le jeu .
2) Décrire les évènements A gagne et B gagne.
3) La pièce a une probabilité p (avec $p \in (0, 1)$) de tomber sur pile. Y-a-t-il une manière de choisir p pour que le jeu soit équitable ?