Exercice 1 :

On définit un univers Ω et sa tribu associée $\mathcal{F}$ et un autre univers $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ associée.

1) Donner la définition d'une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
2) Donner la définition de P_X
3) Montrer que P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 2 :

On jette 100000 un dé non truqué.

1) définir la variable aléaoire réele X correspondante.
2) écrire un code R qui simule le lancer.
3) calculer la valeur moyenne du dé.
4) comment expliquer ce résultat ? (indice : utiliser l'esperance de X).
5) mêmes question pour la variance.

Exercice 3 :

On tire un nombre $n \in \mathbb{N}$ aléatoirement avec une distribution de Poisson de coefficient $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On note X la variable aléatoire associée. Si le nombre est pair alors $Y = 0$ et sinon $Y = 1$.

1) Définir la variable aléaoire X, donner sa loi
2) Définir la variable aléaoire Y
3) Donner la loi jointe (X, Y)
4) Donner la loi de Y
5) Illustrer avec un code R

Exercice 4 :

On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. On appelle cela une main. Si la main contient 4 rois on gagne 100 euros, si la main contient 3 rois, on gagne 50 euros, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 rois, on perd 10 euro et si la main ne contient aucun roi, on perd 50 euros. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain.

a) Etablir la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X,
c) Mêmes questions avec un jeu de 32 cartes.

Exercice 5 :

Supposons que 10 balles soient mises dans 5 boites, chacune indépendamment avec probabilité p_i dans la boite i, avec $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.

1) Trouver l'esperance du nombre moyen de boites vides
2) Trouver l'esperance du nombre moyen de boites contenant exactement 1 balle.

Exercice 6 :

On considère deux v.a. x et y. Leur probabilité jointe s'exprime par

$$P(x, y) = A \exp(-x^2 - 2y)$$

où A est une constante. De plus on a $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $y \leq 1$.

1) Calculer la constante A,
2) Est-ce que x et y sont indépendants ? Justifiez votre réponse.

Exercice 7 :

Lucie joue au bowling, elle a une probabilité de 0.75 de faire tomber toutes les quilles (strike). Dans la soirée elle lance 18 boules et on considère les lancers indépendants. Soit X la variable aléaoire égale au nombre de strikes réussis.

1) Quelle est la loi de X
2) Calculer la probabilité que Lucie réussisse 4 strikes
3) Calculer l'espérance de X et sa variance.

Exercice 8 :

On choisit une boules au hasard dans une urne contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 € pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 € pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par la variable aléatoire X.

1) Quelles sont les valeurs possibles pour X
2) Quelles sont les probabilités associées à ces valeurs ?
3) Calculer l'espérance de X
4) Refaire l'exercice avec 2 boules tirées au hasard

Exercice 9 :

On classe cinq hommes et cinq femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les $10!$ classements possibles ont tous la même probabilité. On désigne le rang de la meilleure femme par la variable aléatoire X (par exemple $X = 2$ si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Trouver $P(X = i)$ pour $i \in \{1, \dots, 6\}$.

Exercice 10 :

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de face du dessus.

On suppose que le dé est truqué de telle manière que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit dessus.

1) Déterminer la loi de X,
2) Calculer son espérance.

Exercice 11 :

La prévalence du daltonisme chez les femmes est de 0.4%. Sur un échantillon de 800 femmes on note X le nombre aléatoire de femmes daltoniennes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres,
2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$,
3) On peut approcher la loi par une loi de Poisson, pourquoi ? Laquelle ?
4) Calculer la probabilité d'avoir au maximum 5 femmes atteintes de daltonisme.

Exercice 12 :

Une roulette porte 38 numéros équiprobables notés de 1 à 38. On joue deux fois de suite. On note X la valeur du premier tirage et Y celle du second. On note U le plus grand des 2 nombres tirés et V le plus petit.

1) Donner la loi du couple
2) Déterminer les lois marginales
3) Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $E(V)$
4) U et V sont elles indépendantes ?