Exercice 1 :

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2 :

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $p = 2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1-p = 1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2), (X = 3), (X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4 .
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$ pour $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n .
4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_n nq^n$, et calculer alors $\mathbb{E}(X)$. Interpréter.
5. Soit Y le nombre de *faces* obtenus au cours de cette expérience. Donner la loi de Y.

Exercice 3 :

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois *pile*. Soit X le nombre de *face* obtenus au cours de cette expérience.

1) Déterminer la loi de X.
2) Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3) On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Calculer l'espérance de Y.
4) On pose $Z := X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 4 :

Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons $1, 2, \dots, 10$ cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 5 :

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

Exercice 6 :

Un étang contient des brochets et des truites. On note p la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer p. On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de truites obtenues.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de p la quantité $P(X = 8)$ est-elle maximale ?

Exercice 7 :

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

— ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
— ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1) Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2) Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}. (indication : la grenouille ne passe pas par la marche k si et seulement si elle passe par la marche $k - 1$ et si elle fait un saut de deux marches.)
   En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$. Ecrire un code R qui simule p_k.

3) On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Écrire un code R qui simule la variable aléatoire Z_n.

Exercice 8 :

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2) Pour $(i,k) \in \{1,\ldots,n\}^2$, déterminer $P(Y=k|X=i)$.
3) Déterminer la loi de Y.
4) Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 9 :

Soit X une variable aléatoire discrète finie prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1,\ldots,n$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$

avec la convention$x \ln x = 0$ si $x = 0$ (ce qui correspond au prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \to x \ln x$).

1) Démontrer que $H(X) \geq 0$.
2) Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $p_i = 1$.
3) Vérifier que, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$ on a

$$(-np_k)\ln(np_k) \leq 1 - np_k$$

avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

4) En déduire que $H(X) \leq \ln n$.
5) Démontrer que $H(X) = \ln n$ si et seulement si X est équi-distribuée, ie si $p_i = 1/n$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Exercice 10 :

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

1) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2) Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X_n/n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$
3) En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.