

Exercice 1 :

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire à densité. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et préciser si elles admettent une espérance.

- 1) $f_1(x) := \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 2) $f_2(x) := \frac{1}{(1+x^2)}, x \in \mathbb{R},$
- 3) $f_3(x) := \frac{\exp(x)}{(\exp(x)+1)^2}, x \in \mathbb{R},$
- 4) $f_4(x) := \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 5) $f_5(x) := \begin{cases} 1/|x|^3 & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 6) $f_6(x) := \sin x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a/(1+x^2)$. Déterminer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X . Déterminer la fonction de répartition de X . X admet-elle une espérance ?

Exercice 3 :

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité $f(x) := c(1-x)^4 \chi_{[0,1]}(x)$.

- 1) Déterminer c .
- 2) La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X .
- 3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- 4) On pose $Y = 2X + 1$.
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - (b) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y .
 - (c) Reprendre les mêmes questions avec $Y = X^2$.

Exercice 5 :

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable D suit une loi de densité

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ A \exp(-x/82) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la constante A pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
- 2) Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km, soit supérieure à 25 km.
- 3) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ? Comparez avec le résultat précédent.
- 4) On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident. À l'aide d'une intégration par partie, calculer l'espérance $\mathbb{E}(D) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$.
- 5) L'entreprise possède n autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle donnée par la densité f . On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km. Montrer que X_d suit une loi binomiale et déterminez les paramètres. En déduire le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

Exercice 6 :

Le délai de livraison d'une pièce suit une loi normale de moyenne 30 jours et d'écart-type 5 jours.

- 1) Quelle est la probabilité pour que le délai soit inférieur à 38 jours ? Compris entre 22 et 38 jours ?
- 2) Même question si la moyenne passe à 32 jours avec un écart-type de 8 jours.

Exercice 7 :

Dans une revue, on peut lire : *On estime à 60,5% le pourcentage de français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année.* On considère 100 personnes prises au hasard, avec remise, parmi la population française. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque prélèvement de 100 personnes associe le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale, on donnera son espérance et l'écart type.
- 2) Calculer la probabilité de l'évènement $X = 45$.
- 3) On décide d'approcher X par une loi normale notée Y . Donner les paramètres de cette loi normale et calculer $P(44,5 \leq Y \leq 45,5)$.
- 4) Déterminer la probabilité qu'au plus 30 de ces 100 personnes ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.