

Travaux Dirigés : Optimisation MACS 2

Vuk Milisic

TD n° 3, 7/11/2012

Exercice 0.1. Soit A une matrice à coefficients complexes $A \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{C})$. On veut maintenant minimiser la fonctionnelle

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

sous la contrainte $K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \text{ t. q. } |\mathbf{x}|_2 = 1\}$.

- a) Quelles sont les directions admissibles au sens de Fréchet ?
- b) Même question au sens de Gateaux ?
- c) Conclure que satisfait le minimiseur de cette fonctionnelle ?

Exercice 0.2 (Lemme de Farkas). On veut montrer

Lemme 0.3. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $N \neq n$. Les deux point suivants sont équivalents

- i) Le vecteur $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{a}_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout i . On dit que $\mathbf{a}$ est une combinaison conique des vecteurs $\mathbf{a}_i$.
- ii) Tout vecteur $\mathbf{h}$ satisfaisant $(\mathbf{h}, \mathbf{a}_i) \geq 0$ pour tout i satisfait aussi $(\mathbf{h}, \mathbf{a}) \geq 0$.

On se propose dans ce TD de démontrer ce lemme :

I) Sens direct

- a) Montrer que le sens direct i) $\implies$ ii) est trivial.
- b) Montrer que pour $\mathbf{a} = 0$ la réciproque du lemme est vérifiée.

On suppose maintenant que ii) est vérifiée.

II) Méthode géométrique

On définit $\Pi := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d \text{ t. q. } (\mathbf{a}, \mathbf{h}) = -1\}$ et $A_i := \{\mathbf{h} \in \Pi \text{ t. q. } (\mathbf{a}_i, \mathbf{h}) \geq 0\}$.

- a) En prenant deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ dessiner le cône, dessiner Π , A_1 et A_2 . Que peut on dire de $\cap_{i=1}^2 A_i$? Pour ceux qui sont bons en dessin recommencer en 3D avec 3 (ou 4) vecteurs.

- b) Montrer que $\cap_{i=1}^N A_i = \emptyset$
- c) On choisit la plus petite des familles $A_1, \dots, A_k$ telle que $I := \cap_{i=1}^k A_i \equiv \emptyset$ et telle que $\cap_{i=1, i \neq j}^k A_i \neq \emptyset$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$. On veut montrer que
- 1) $\mathbf{a} \in \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\} =: E$, procéder par l'absurde : prendre $\mathbf{f}$ la projection orthogonale sur $E^\perp$. À partir de $\mathbf{f}$ construire un élément de I . Conclure
 - 2) la famille $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ est libre. C'est la partie la plus "dure" du TD : on suppose le contraire et on pose $A'_i := A_i \cap E$
 - a) Montrer que $\cap_{i=1}^k A'_i \equiv \emptyset$
 - b) En utilisant le **théorème de Helly** : "On considère $X_1, \dots, X_m$ une famille de m ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ avec $m \geq n + 1$. On suppose que pour tout choix de $n + 1$ convexes parmi les m X_i ces ensembles se rencontrent. Alors il existe un point qui appartient à **tous** les X_i . Montrer que $\cap_{i=1, i \neq j}^k A'_i \neq \emptyset$ "
- d) À ce stade on a montré que $\mathbf{a} = \sum_i^k \lambda_i \mathbf{a}_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i . Par contradiction on suppose que $\lambda_1 < 0$. On complète la famille libre dans $\mathbb{R}^n$ pour en faire une base. Soit $\xi_i(x)$ la i -ème coordonnée de x dans cette dernière base.
- a) En utilisant le théorème de Riesz montrer qu'il existe $\mathbf{f}$ tel que : $\xi_1(x) = (\mathbf{f}, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
 - b) montrer que l'on peut construire un vecteur $\mathbf{h}$ qui appartient à l'intersection des $A_1, \dots, A_k$, d'où la contradiction.
 - c) conclure

Exercice 0.4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- a) Appliquer la méthode de la relaxation pour calculer la solution du problème

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} J(\mathbf{x}), \quad J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x})$$

- b) Que dire de la vitesse de convergence de cette méthode ?
- c) Quel pourrait être le test d'arrêt de la méthode ?