

Travaux Dirigés : Optimisation MACS 2

Vuk Milisic

TD n°4: 16/11/12

Exercice 0.1. Soit Ω un domaine Lipschitz et borné de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème de minimisation suivant :

$$u = \operatorname{argmin}_{w \in H_0^1(\Omega)} J(w), \quad J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \langle f, w \rangle$$

ou $f \in H^{-1}(\Omega)$, le crochet étant à prendre dans le sens de la dualité $H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)$. On dénotera dans la suite les deux produits scalaires

$$(u, w) = \int_{\Omega} u w dx, \quad [u, w] = \int_{\Omega} u w + \nabla u \cdot \nabla w dx$$

respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. A ces produits scalaires on associe les normes

$$\|u\|_0 = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)}, \quad \|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{[u, u]}$$

On se donne $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. On propose l'algorithme suivant : pour tout $n > 0$ étant donné un $u^n \in H_0^1(\Omega)$ on calcule u^{n+1} en suivant les trois étapes :

1) Direction de descente. Soit v l'unique solution du problème

$$[v^n, w] = \int_{\Omega} \nabla u^n \cdot \nabla w dx - \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

2) Pas optimal : on choisit $\mu^n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mu_n = \operatorname{argmin}_{\mu \in \mathbb{R}} \phi(\mu), \quad \phi(\mu) := J(u^n - \mu v^n)$$

3) Construction de l'itéré suivant :

$$u^{n+1} = u^n + \mu^n v^n$$

On veut prouver la convergence de schéma vers le minimum de la fonctionnelle J .

- i) La fonctionnelle J est elle α convexe ?
- ii) Montrer l'existence et l'unicité de v^n , à quoi correspond v^n ?
- iii) Quelle équation permet de calculer explicitement μ^n ?
- iv) La fonctionnelle ϕ est elle α convexe ?
- v) Montrer que

$$[v^{n+1}, v^n] = 0, \quad \forall n \geq 1$$

- vi) Montrer que

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \frac{\alpha}{2} \|u^n - u^{n+1}\|$$

en précisant la norme (L^2 ou H^1).

- vii) Montrer que $J(u^n)$ converge
- viii) En déduire que $u^n - u^{n+1}$ tend vers zéro
- ix) Vérifier que

$$\|v^n\|_1^2 \leq [v^n, v^n - v^{n+1}], \quad \forall n \geq 1$$

en déduire que

$$\|v^n\|_1 \leq \|v^n - v^{n+1}\|_1, \quad \forall n \geq 1$$

- x) Montrer par l'absurde que u^n est bornée dans H^1
 - xi) Montrer que
- $$\|v^n - v^{n+1}\|_1 \leq C \|u^n - u^{n+1}\|_1, \quad \forall n \geq 1$$
- xii) En déduire que v_n tend vers 0 quand n croît.
 - xiii) Etablir que

$$\alpha \|u^n - u\|_1^2 \leq [v^n, u^n - u], \quad \forall n \geq 1$$

- xiv) Conclure

Exercice 0.2. Soient $A \in \text{Mat}(n, n)$ symétrique définie positive, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonctionnelle :

$$J(x) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x}).$$

Soient aussi $C \in \text{Mat}(m, n)$, telle que $\text{rank}(C) = m \leq n$, et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$. On introduit les contraintes :

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid C\mathbf{x} = \mathbf{d}\}.$$

1. Quelle est la nature de l'ensemble K ?
2. Montrer que J est coercitive.
3. Calculer J' .
4. Montrer que le minimum est donné par la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + {}^t C\mathbf{p}$ avec $\mathbf{p}$ un vecteur dans $\mathbb{R}^m$.
5. Trouver la valeur de $\mathbf{p}$. Conclure.