TD Optimisation n° 8

18/12/2012

On définit J comme
$$J(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x})$$
Soit $A \in \mathrm{Mat}(N, N)$ une matrice symétrique définie positive.

Exercice 0.1. A partir de l'algorithme du cours : à l'étape $n = 0$ on choisit $d_0 = -J'(x_0)$, puis pour tout $n \geq 1$, x_n, d_n donnés on calcule x_{n+1}, d_{n+1} de la manière suivante.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \rho_n d_n, \\ d_{n+1} = -J'(x_{n+1}) + \beta_{n+1} d_n, \\ \beta_{n+1} = \dfrac{|J'(x_{n+1})|^2}{|J'(x_n)|^2}, \\ \rho_n = -\dfrac{|J'(x_n)|^2}{(Ad_n, J'(x_n))} \end{cases}$$

- Montrer que l'on peut réécrire ces opérations et produire le programme `matlab` suivant :

```
function [x] = conjgrad(A,b,x)
    r=b-A*x;
    p=r;
    rsold=r'*r;

    for i=1:10000000
        Ap=A*p;
        alpha=rsold/(p'*Ap);
        x=x+alpha*p
        r=r-alpha*Ap
        rsnew=r'*r;
        if sqrt(rsnew)<1e-10
              break;
        end
        p=r+rsnew/rsold*p
        rsold=rsnew;
    end
end
```

  On précisera le lien entre les variables du code et celles utilisées dans l'algorithme.

– Reprendre le dernier exercice du TD 7 et donner les valeurs successives pour (d_n, x_n)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \; x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 0.2. On perturbe J avec une non-linéarité d'ordre 4 :

$$J(\mathbf{x}) := \frac{\mu}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{4}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{x})$$

1. Ecrire sous forme vectorielle (resp. matricicelle) le gradient G (resp. la Hessienne H) de J
2. On veut utiliser les méthodes de Newton et quasi-Newton pour résoudre ce problème
   (a) Newton : écrire la méthode
   (b) Quasi-Newton : méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)
   On se donne à l'étape k, $\mathbf{x}_k$, B_{k-1} (qui joue le rôle de l'inverse approché du Hessien $H(\mathbf{x}_k)$.
      i. On résout $\mathbf{p}_k = B_k^{-1} G(\mathbf{x}_k)$
      ii. Ecrire ce que l'on doit résoudre pour trouver α_k optimal tq
      $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$
      iii. On pose $\mathbf{s}_k = \alpha_k \mathbf{p}_k$ et $\mathbf{y}_k = G(\mathbf{x}_{k+1}) - G(\mathbf{x}_k)$ On veut avoir :
      $$B_{k+1}\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k$$
      on se propose de chercher B_{k+1} sous la forme
      $$B_{k+1} = B_k + \omega_1 \mathbf{y}_k \otimes \mathbf{y}_k^* + \omega_2 (M\mathbf{s}_k) \otimes (M\mathbf{s}_k)^*$$
      calculer ω_1 et ω_2 pour que l'on ait : $B_{k+1}\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k$
      iv. Quelle formule obtient on pour le choix particulier de $M = B_k$
      v. Montrer que si A est inversible et $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sont deux vecteurs alors on a
      $$(A + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}A^{-1}}{1 + (\mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u})}$$
      vi. Quelle formule de récurrence a-t-on pour B_{k+1}^{-1} ? Quel est l'intérêt de cette méthode ?