Feuille de TD 2
Echantillonnage

1. Rappels de cours

1. On définit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite à croissance lente en posant :
$$\exists(A,N,n_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{N}_*\times\mathbb{N}_*\ ;\ |y_n|\leq A(1+n^2)^N,\quad \forall|n|\geq n_0$$
Montrer que si la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente alors la distribution
$$T_y:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}y_k\delta_{ka}$$
est tempérée.
2. Montrer que la transformée de Fourier de T_y est périodique et calculer sa période.
3. Donner un exemple de distribution périodique qui ne soit pas localement intégrable.

2. Trois notes de musique

On génère un son comportant deux composantes audibles (sinusoïdes) : deux fréquences pures à 1 000 Hz et 3 000 Hz ainsi qu'une composante à 43 500 Hz. (Cette dernière composante est inaudible, car l'oreille humaine n'entend pas les sons au-delà d'une fréquence de 20 000 Hz environ). On échantilonne à $f_e=44100$ Hz (soit une qualité CD).

1. Sommes-nous dans les hypothèses du théorème d'échantillonnage ?
2. Représenter le spectre après échantillonnage du signal.
3. Quelles sont les fréquences présentes ?
4. Ecrire la TFD de ce signal avec la fréquence d'échantillonnage donnée. Que retrouve-t-on ?

TP Ecrire le code python qui permet d'illustrer cet exercice. Avec les programmes fournis générer le fichier son correspondant.

On constate à l'écoute qu'un son médium de fréquence 600 Hz apparaît du fait de la fréquence d'échantillonnage qui est trop petite par rapport à la haute fréquence $\lambda_3=43500$ présente dans le signal échantillonné.

On peut aussi comparer l'échantillon avec un échantillon sans la haute fréquance et un échantillon avec les fréquences $600,1000$ et 3000.

3. Fonction plateau et sinc

Soit f un signal défini sur $\mathbb{R}$ tel que sa transformée de Fourrier soit $\hat{f}$ définie par
$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } |\omega|\leq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Que peut-on dire du support de f ?
2. Calculer f et donner une allure de son graphe
3. Calculer l'énergie totale de f
4. On suppose f est échantillonnée aux instants na avec $n \in \mathbb{Z}$, on appelle g le signal échantillonné. Exprimer $\hat{g}$. Dessiner son graphe lorsque $a = 1/3$ et $a = 2/3$. Que remarquez vous ?

TP Illustrer cet exemple numériquement.